

Endomorphismenringe von Selbstgeneratoren

Birge Zimmermann

1974

ENDOMORPHISMENRINGE
VON SELBSTGENERATOREN

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der
Doktorwürde der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Vorgelegt von Birge Zimmermann

München, Juni 1974



1. Berichterstatter: Prof. Dr. Fr. Kasch
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. B. Pareigis
- Tag der mündlichen Prüfung: 193. 11. 74

Einleitung

Ist $M = M_R$ - ein Objekt der Kategorie $\mathcal{M}_R$ der unitären R -Rechtsmoduln über einem assoziativen Ring R mit 1 - ein R -Progenerator mit Endomorphismenring Γ , so sind die Funktoren

$$F = \text{Hom}_R(M, -): \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_\Gamma \quad \text{und}$$

$$H = M \otimes_R -: {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_\Gamma\mathcal{M}$$

bekanntlich Äquivalenzen und erhalten damit alle kategorischen Eigenschaften.

Verschiedene Autoren, so F.W. Anderson und R.W. Miller ([1], [11]) bestimmten diejenigen endlich erzeugten und projektiven Moduln M_R , für welche H injektive bzw. projektive Hüllen erhält, und bezeichneten M_R entsprechend als perfekten Injektor bzw. Projektor. Hier werden, von wesentlich schwächeren Voraussetzungen für M_R ausgehend (etwa $MT = M$, falls $T = \Sigma \text{Bi}(f)$, oder M_R ist selbstprojektiv $f \in \text{Hom}_R(M, R)$)

Erhaltungs- und Reflexionseigenschaften von F untersucht.

Es ist nahezu zwingend, zu diesem Zweck die Einschränkung F' von F auf die volle Unterkategorie $\mathcal{M}$ der von M_R erzeugten R -Rechtsmoduln zu betrachten. Zentrales Thema von § 1 sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß F' voll-treu ist (vgl. hierzu [4]) bzw. alle Isomorphieklassen von $\mathcal{M}_\Gamma$ berührt, sowie eine Untersuchung der "Lage" von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}_R$. Man erhält jeweils eine Reihe von Konsequenzen für F . Diese Überlegungen bereiten einerseits § 2 vor, andererseits führen sie zur folgenden Verallgemeinerung des Morita-Theorems*: $\mathcal{M}$ ist genau dann gegen R -Untermoduln

*Nach Fertigstellung dieser Arbeit erschien im Juni 1974 das angeführte Ergebnis in [23]. Der hier gegebene, einfachere Beweis geht nicht von den Morita-Theoremen, sondern von einer speziellen Version des Satzes von Gabriel und Popescu ([4]) aus. Die vorbereitenden Aussagen sind von eigenständigem Interesse.

abgeschlossen und vermöge F' zu $\mathcal{M}_R$ äquivalent, wenn M_R ein endlich erzeugter, selbstprojektiver Selbstgenerator ist (letzteres heißt: M_R erzeugt alle Untermoduln von M). In diesem, dem Optimalfall einer Äquivalenz benachbarten Fall sind Eigenschaften von F unmittelbar abzulesen. In § 2 erhält man eine Verschärfung für Moduln $M = MT$.

Zunächst wird in § 2 untersucht, wann F injektive Hüllen erhält. Perfekte Koinjektoren (die Bezeichnung wurde in Anlehnung an die von Anderson, jedoch ohne übergeordnete Voraussetzung für M_R gewählt) werden für $R = \mathbb{Z}$, Moduln $M = MT$ und selbstprojektive Moduln charakterisiert: Sie stimmen mit den Selbstgeneratoren bzw. Σ -Selbstgeneratoren (d.h. M_R erzeugt alle Untermoduln von M^n , $n \in \mathbb{N}$) überein. Insbesondere sind sie dadurch gekennzeichnet, daß M gegen R -Untermoduln abgeschlossen und F' voll-treu ist, was gemäß § 1 zusätzliche Erhaltungs- und Reflexionseigenschaften von F nach sich zieht.

Etliche Folgerungen und Beispiele ergeben sich sofort: Der Struktursatz für abelsche Gruppen erlaubt es beispielsweise, die über ihrem Endomorphismenring flachen Torsionsgruppen anzugeben. Entscheidend belegt wird die Anwendbarkeit von § 2 durch die folgenden Abschnitte.

Selbstgeneratoren $M=MT$ sind, wie sich zeigt, die allgemeinste Klasse von Moduln, für welche sich das Verhalten von F hinsichtlich der Eigenschaften "einfach" und "wesentlich" vollständig mit dem bekannten Verhalten im Falle eines Vektorraums M deckt (§4). Man schließt daraus u.a. die Sockelformel: $\text{So}([M, A]_R) = [M, \text{So}(A_R)]_\Delta$ für $A_R \in \mathcal{M}_R$ (Δ ist das von Endomorphismen $[m, f]$, $m \in M, f \in \text{Hom}_R(M, R)$ mit $[m, f](x) = m \cdot f(x)$ erzeugte Ideal von R , $[M, A] = \text{Hom}_R(M, A)$).

Weniger zufriedenstellend ist die Radikalbeziehung $(\text{Ra}[M, A]_\Delta)_\Delta = [M, \text{Ra}(A_{R_R})]_\Delta$ für Moduln $M = MT$. Interessant sind jedoch resultierende Aussagen und Beispiele. Bereits

Generatoren von $\mathcal{M}_Z$ zeigen ein Spektrum von Möglichkeiten, welches eine schärfere Formulierung der Abhängigkeit von $\text{Ra}([M, A]_r)$ und $\text{Ra}(AT_R)$ i.a. ausschließt und Bekanntes illustriert ([6], [7]).

Wesentliche Hilfsmittel in diesem Abschnitt sind die Beobachtungen, daß für $M = MT$ Teilverbände der Untermoduln von A_R und $[M, A]_r$ isomorph sind (dies läßt sich aus einem Satz von B.J. Mueller, [12], folgern) und daß für $B_r \subset [M, A]_r$ die Inklusion $BA_r \subset B_r$ wesentlich ist. Am Rande erhält man damit Aussagen über endliche Erzeugbarkeit und Kettenbedingungen von $[M, A]_r$, welche Ergebnisse von F.L. Sandomierski, [15], verallgemeinern.

§ 5 ergänzt mit den Methoden von § 2 Andersons Beschreibung perfekter Injektoren: Für die Untersuchung, wann der Funktor H wesentliche Erweiterungen erhält, kann man auf endliche Erzeugbarkeit von M_R verzichten. Die Ursache für Erhaltungseigenschaften von H , falls $(^R/T)_R$ flach ist (vgl. [1]), liegt in der Gleichwertigkeit der beiden folgenden Aussagen:

- (1) H induziert eine Äquivalenz zwischen den vollen Unterkategorien der von $_R T$ bzw. $_r \Delta$ erzeugten Objekte von $_R \mathcal{M}$ bzw. $_r \mathcal{M}$, und diese Kategorien sind gegen R - bzw. r -Untermoduln abgeschlossen.

Ferner sind T und Δ idempotent, und $_r M$ wird von $_r \Delta$ erzeugt.

- (2) Es gilt $M = MT$, und $(^R/T)_R$ bzw. $(^r/\Delta)_r$ ist flach.

($M = MT$ und Flachheit von $(^r/\Delta)_r$ sind für einen projektiven Modul M_R stets erfüllt, vgl. § 3).

Für den Fall $\Delta = r$ liest man Andersons Charakterisierung perfekter Injektoren ab und vervollständigt die Information durch notwendige und hinreichende Bedingungen für $f: {}_R A \longrightarrow {}_R B$, so daß $H(f)$ in $_r \mathcal{M}$ eine injektive Hülle ist.

Ferner läßt bereits die allgemeinere Situation (1), (2) eine Beschreibung von H unter verschiedenen Aspekten zu (5.4.).

§ 3 enthält Beispiele für Selbstgeneratoren $M = MT$. U.a. fallen alle regulären Moduln im Sinne von [22], sowie alle projektiven Moduln über einem kommutativen oder von Neumann regulären Ring R darunter.

B. J. Mueller betrachtet in [12] zu den Spuridealen T und Δ gehörige Quotientenkategorien von $\mathcal{M}_R$ und $\mathcal{M}_T$, die sich für einen Selbstgenerator $M = MT$ explizit berechnen lassen und zusätzlichen Einblick in die Struktur von $[M, A]_T$ vermitteln (§ 6).

Herrn Prof. Fr. Kasch danke ich dafür, daß er mir Gelegenheit zum Anfertigen dieser Arbeit gab. Ferner bin ich Herrn Prof. Fr. Kasch und Herrn Prof. B. J. Mueller für anregende Gespräche zu Dank verpflichtet.

§ 1 Die volle Unterkategorie der von M_R erzeugten Objekte von $\mathcal{M}_R$

Die folgenden Bezeichnungen sind im weiteren verbindlich:
 R sei ein unitärer Ring, $\mathcal{M}_R$ die Kategorie der unitären R -Rechtsmoduln, $M = M_R$ ein Objekt von $\mathcal{M}_R$, $\Gamma = \text{End}_R(M)$ der Endomorphismenring, $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ der duale Modul. $\text{Hom}_R(A, B)$ wird durch $[A, B]$ abgekürzt.

Aussagekräftig für die Struktur von M_R ist das Bild des $R - R$ bzw. $\Gamma - \Gamma$ - Homomorphismus'

$(-,) : M \otimes_R M \rightarrow R$ mit $(f, m) = f(m)$ bzw.

$[-,] : M \otimes_R M^* \rightarrow \Gamma$ mit $[m, \bar{f}] = m \cdot f(-)$

$T = \text{Bi}(-,)$ bzw. $\Delta = \text{Bi}[-,]$ heißt Spurideal von M_R in R bzw. Γ . $T = R$ bzw. $\Delta = \Gamma$ besagt: M_R ist ein Generator bzw. endlich erzeugt und projektiv.

Man verifiziert die Vertauschungsregeln

$(f, m)g = f[m, \bar{g}]$ und $[m, \bar{f}]n = m(f, n)$ für $m, n \in M$, $f, g \in M^*$.

Damit ist $(\Gamma_{R,R}^{M_R, M^*}, (-,), [-,]) \text{ ein Morita-Kontext im Sinne von [2].}$

Ist I ein Ideal von R , so nennt Sandomierski ([15]) einen Modul A_R I -accessibel, falls $A I = A$.

M ist beispielsweise T -accessibel, falls M_R ein Generator oder projektiv ist (oder etwa ein idempotentes R -Rechtsideal). Jedoch ist T -Accessibilität von M_R , wie aus § 3 hervorgeht, wesentlich schwächer als jede der genannten Bedingungen.

Für A_R setzt man ferner $T_M(A) = \sum \text{Bi}(f)$, die sog.

$f \in \text{Hom}_R(M, A)$

Spur von M auf A ; man bemerkt $T_M(R) = T$ und $T_M(M) = M$.

M_R heißt ein Selbstgenerator (kurz: S.G.), falls M_R alle Untermoduln von M erzeugt, d.h. $T_M(U) = U$ für alle $U_R \subset M_R$, ein Σ -Selbstgenerator (kurz: Σ -S.G.), falls M_R alle Untermoduln von M^n , $n \in \mathbb{N}$ erzeugt.

Die zu dem adjungierten Funktorpaar (G, F)

$$F : \mathcal{M}_R \ni A \longmapsto \text{Hom}_R(M, A) = [M, A] \in \mathcal{M}_F$$

$$G : \mathcal{M}_F \ni B \longmapsto B \otimes_F M \in \mathcal{M}_R$$

gehörigen Adjunktionstransformationen $\phi : GF \longrightarrow 1_{\mathcal{M}_R}$,

$\psi : 1_{\mathcal{M}_F} \longrightarrow FG$ sind explizit gegeben durch:

$$\phi(A) : [M, A] \otimes_F M \ni \sum f_i \otimes m_i \longmapsto \sum f_i(m_i) \in A$$

$$\psi(B) : B \ni b \longmapsto (m \mapsto b \otimes m) \in [M, B \otimes_F M]$$

Offensichtlich stimmt das Bild von $\phi(A)$ mit der Spur von M auf A überein, d.h. A wird genau dann von M_R erzeugt, wenn $\phi(A)$ epimorph ist, und M_R ist genau dann ein Generator, wenn ϕ ein funktorieller Epimorphismus bzw. - gem. [4] gleichbedeutend - ein funktorieller Isomorphismus ist.

ϕ und ψ geben Aufschluß über F und G : Daß ϕ bzw. ψ ein Isomorphismus ist, ist bekanntlich äquivalent dazu, daß F bzw. G voll - treu ist (d.h. die auf den Morphismenmengen induzierten Abbildungen sind bijektiv). Für F beispielsweise ist dies aus dem folgenden kommutativen Diagramm zu ersehen:

$$\begin{array}{ccc} [A, B] \ni f & \longmapsto & F(f) \in [F(A), F(B)] \\ \downarrow & & \swarrow \cong \\ [\phi(A), B] & & \\ \downarrow & & \\ [GF(A), B] & & \end{array}$$

Die volle Unterkategorie der von M_R erzeugten Objekte von $\mathcal{M}_R$ wird mit $\mathcal{N}$ bezeichnet, $F': \mathcal{N} \ni A \longrightarrow [M, A] \in \mathcal{M}_T$ sei die Einschränkung von F auf $\mathcal{N}$, $G': \mathcal{M}_T \ni B \longrightarrow B \otimes_T M \in \mathcal{N}$. ($B \otimes_T M \in \mathcal{N}$ ist klar).

Die zu dem adjungierten Funktorpaar (F', G') gehörigen Adjunktionstransformationen $\phi': G' F' \longrightarrow 1_{\mathcal{N}}$, $\psi': 1_{\mathcal{M}_T} \longrightarrow F' G'$ ($\phi'(A) = \phi(A)$ für $A \in \mathcal{N}$, $\psi'(B) = \psi(B)$ für $B \in \mathcal{M}_T$) sind entsprechend genau dann Isomorphismen, wenn F' bzw. G' voll - treu ist.

Die Betrachtung der Unterkategorie $\mathcal{N}$ liegt nahe: Jeder Schluß von A_R auf $[M, A]_T$ und umgekehrt basiert auf einem Zusammenhang von $T_M(A)_R$ und $[M, A] = F'(T_M(A))_T$. Eigenschaften von F erhält man also insbesondere, wenn man das Verhalten von F' und die "Lage" von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}_R$ kennt.

Zu einem überraschend einfachen Beweis des Satzes von Gabriel und Popescu für Modulkategorien (vgl. [4]) führt die folgende hinreichende Bedingung dafür, daß F' voll - treu ist. In § 2 werden Klassen von Moduln angegeben, für welche diese Bedingung auch notwendig und zur Erhaltung von injektiven Hüllen durch F äquivalent ist.

Lemma 1.1.: $A_R \in \mathcal{M}_R$. Erzeugt M_R alle Kerne von Homomorphismen $f: M^n \longrightarrow A$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $\phi(A)$ ein Monomorphismus, d.h. $[M, A] \otimes_T M \stackrel{\phi(A)}{=} (A)$ Bi $(\phi(A)) = T_M(A)$.
Ist M_R ein Σ - S.G., so ist ϕ' ein Isomorphismus, d.h. F' voll - treu.

Beweis: Seien $f_i \in [M, A]$, $m_i \in M$ mit $\sum f_i(m_i) = 0$, d.h. $(m_i) \in \text{Ke} (+ f_i: M^n \rightarrow A)$. Nach Vor. hat man $(m_i) = \sum g_j(n_j)$ mit $g_j \in [M, \text{Ke} (+ f_i)]$, $n_j \in M$. Falls $\text{pr}_i: M^n \rightarrow M$ die i -te Projektion bezeichnet, bedeutet dies

$$\sum f_i \otimes m_i = \sum f_i \otimes \text{pr}_i(\sum g_j(n_j)) = \sum_{i,j} f_i \text{pr}_i g_j \otimes n_j = 0,$$

da $\sum_i f_i \text{pr}_i g_j = 0$ für alle j .

Der Rest ist mit der Definition von Φ' klar.

Die Voraussetzung von Lemma 1.1. ist i.a. nicht notwendig für die Injektivität von $\Phi(A)$. $\Phi(M)$ ist beispielsweise stets ein Isomorphismus, während die Vor. von 1.1. für $A = M$ nicht allgemein erfüllt ist:

Lemma 1.2. Γ^M ist genau dann flach, wenn M_R alle Kerne von Homomorphismen $f: M^n \rightarrow M$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugt.

Beweis: siehe [21]; mit [3] (S. 43, Cor. 1) ist ein ganz elementarer Beweis möglich.

Lemma 1.3. $\mathcal{M}$ ist genau dann gegen R -Untermoduln abgeschlossen, wenn M_R ein Σ -S. G. ist.

Beweis: Eine Richtung ist klar. Sei nun M_R ein Σ -S. G., $A \in \mathcal{M}$ - d.h. es existiert ein Epimorphismus $M^{(I)} \xrightarrow{f} A$ - und $B_R \subset A_R$. o.E. ist B_R endl. erzeugt; es gibt also eine endliche Teilmenge I' von I mit $B \subset f(M^{(I')}) = B_i(f')$, falls $f': M^{(I')} \rightarrow A$ Einschränkung von f ist.

Nach Vor. hat man weiter einen Epimorphismus $g: M^{(J)} \xrightarrow{f'^{-1}} B$; damit ist $f'g: M^{(J)} \rightarrow B$ epimorph.

SATZ 1.4.: Für die Aussagen

- (1) M_R ist ein Σ - S. G.
- (2) ϕ' ist ein fkt. Isomorphismus, und G' ist exakt
- (3) F' ist voll - treu, und G' ist exakt
- (4) F' (bzw. G') induziert eine Äquivalenz

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_R / \text{Ker } G' = \mathcal{M}_R / \text{Ker } G$$

- (5) F' ist voll - treu

gelten die Implikationen: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$.

Bemerkungen:

1. Ist M_R ein Generator, so ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}_R$, $F' = F$. Für $F' = F$ ist die Implikation $(5) \Rightarrow (1)$ trivial, und man erhält die übliche Anwendung des Satzes von Gabriel und Popescu auf Modulkategorien ([4]).

Satz 1. 4. läßt sich unter Berücksichtigung von Lemma 1.3. auch unmittelbar aus [4] folgern, da $\mathcal{M}$ unter Voraussetzung von (1) eine Grothendieckkategorie mit Generator M ist (die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ gegen Quotienten und direkte Summen in $\mathcal{M}_R$ ist trivial).

2. Für die in § 2 exponierten Klassen von Moduln sind die Aussagen (1) - (4) von 1.4. äquivalent und weiter damit gleichwertig daß M_R ein S. G. ist; letzteres ist in speziellen Situationen i.a. wesentlich leichter nachzuprüfen, als die Eigenschaft " Σ - S. G."

Beweis von 1.4.:

(1) $\Rightarrow$ (2): Dies folgt aus 1.1. und 1.2.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5): Mit den entsprechenden Definitionen klar (vgl. etwa [17]) bzw. trivial.

Ist F' voll - treu, G' exakt, so zeigen Standardschlüsse für das adjungierte Funktorpaar (G', F') , daß F' Injektivität, Selbstinjektivität und wesentliche Erweiterungen erhält und reflektiert, sowie die Eigenschaft "Generator" reflektiert (für Injektivität und wesentliche Erweiterungen ist dies bekannt).

Ist M_R ein Σ - S. G., so ist gemäß 1.3. $\mathcal{M}$ abgeschlossen gegen Untermoduln, Quotienten und direkte Summen in $\mathcal{M}_R$, so daß sich für ein Objekt $A \in \mathcal{M}$ Eigenschaften von A in $\mathcal{M}$ in korrespondierende Eigenschaften von A_R in $\mathcal{M}_R$ übersetzen lassen, etwa: A ist genau dann injektiv in $\mathcal{M}$, wenn A_R M -injektiv in $\mathcal{M}_R$ ist (M ist ein Generator für $\mathcal{M}$), oder A ist genau dann artinsch (noethersch) in $\mathcal{M}$, wenn A_R artinsch (noethersch) in $\mathcal{M}_R$ ist. So erhält man:

Folgerung 1.5.: Ist M_R ein Σ - S. G., so gilt für $A_R \in \mathcal{M}_R$:

- a) Äquivalent sind: (i) $[M, A]_r$ ist injektiv
(ii) A_R ist M - injektiv
(iii) $T_M(A)_R$ ist M - injektiv
Insbesondere erhält $F: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{M}_r$ Injektivität.
- b) Äquivalent sind: (i) $[M, A]_r$ ist selbstinjektiv
(ii) $T_M(A)_R$ ist selbstinjektiv
(ii) ist erfüllt, falls A_R selbstinjektiv ist, d.h.
 $F: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{M}_r$ erhält Selbstinjektivität.

- c) Für einen Homomorphismus $f \in \mathcal{M}_R$, $f: A \rightarrow B$, sind äquivalent: (i) $[\underline{M}, \underline{f}]: [\underline{M}, \underline{A}] \rightarrow [\underline{M}, \underline{B}]$ ist ein (wesentlicher) Monomorphismus in $\mathcal{M}_T$
(ii) $f|_{T_M(A)}: T_M(A) \rightarrow T_M(B)$ ist ein (wesentlicher) Monomorphismus in $\mathcal{M}_R$
- (ii) ist erfüllt, falls $f: A \hookrightarrow B$ wesentlich ist, d.h. $F: \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{M}_T$ erhält wesentliche Erweiterungen.
- d) Ist $[\underline{M}, \underline{A}]_T$ ein Generator für $\mathcal{M}_T$, so erzeugt A_R die Objekte von $\mathcal{M}$.
- e) Ist $[\underline{M}, \underline{A}]_T$ artinsch (noethersch), so ist $T_M(A)_R$ artinsch (noethersch), d.h. F reflektiert Kettenbedingungen.

Beweis: zu a): (ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $U_R \subset M_R$ und $f \in [\underline{U}, \underline{A}]$.
Gemäß 1.3. hat man $U \in \mathcal{M}$ und damit $f(U) \in \mathcal{M}$,
d.h. $f(U) \subset T_M(A)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Da für $h \in [\underline{M}, \underline{A}]$ gilt:
 $h(M) \subset T_M(A)$, ist die Behauptung klar.

Die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iif) ist mit 1.3. und 1.4. klar.

Entsprechend zeigt man b, c, d.

Zu e): Da M_R gemäß 1.3. alle R -Untermoduln von $T_M(A)$ erzeugt, ist die Abbildung
 $\mathcal{U}_R(T_M(A)) \ni A' \mapsto [\underline{M}, \underline{A'}] \in \mathcal{U}_T([\underline{M}, \underline{A}])$ ein
Monomorphismus vom Verband $\mathcal{U}_R(T_M(A))$ der R -
Untermoduln von $T_M(A)$ in den Verband $\mathcal{U}_T([\underline{M}, \underline{A}])$
der T -Untermoduln von $[\underline{M}, \underline{A}]$.

Die Aussage von 1.5. für die vor allem interessierenden Spezialfälle M_R , Γ_R und T_R , M^*_R liegt auf der Hand.

Einige Beispiele: Für einen Σ - S. G. M_R gilt:

1. Ist $M_R \hookrightarrow E(M)_R$ eine injektive Hülle, so ist $\Gamma_R \hookrightarrow [M, E(M)]_R$ eine injektive Hülle.
2. Ist $T_R \hookrightarrow E(T)_R$ eine injektive Hülle, so ist $M^*_R \hookrightarrow [M, E(T)]_R$ eine injektive Hülle.
3. M^*_R ist genau dann selbstinjektiv, wenn T_R selbstinjektiv ist.
4. Ist Γ_R artinsch (noethersch), so ist M_R artinsch (noethersch).
5. Ist M^*_R artinsch (noethersch), so ist T_R artinsch (noethersch).

Bemerkungen 1.6.:

1. 1.5.a ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pahl [14]:
Ist M_R ein Generator, so ist Γ_R genau dann injektiv, wenn M_R selbstinjektiv ist.
2. Ist M_R ein Σ - S. G., so ist $\mathcal{M}$ vermöge F' äquivalent zur vollen Unterkategorie der zu $[M, A]_R$, $A \in \mathcal{M}_R$, isomorphen Objekte von $\mathcal{M}_R$. Damit lassen sich (vgl. 1.5.a) die Testfolgen für Injektivität von $[M, A]_R$ einschränken auf Folgen der Form

$$[M, U]_R \hookrightarrow \Gamma_R \quad \text{mit } U_R \subset M_R.$$

Dies ist i.a. eine echte Reduktion der Testfolgen, wie man aus dem Beispiel eines unendlichdimensionalen Vektorraums ersieht.

SATZ 1.7.: 1. Ist M_R endlich erzeugt und selbstprojektiv, so ist Ψ ein funktorieller Isomorphismus, d. h. $B_I = [M, B \otimes M]_I$ vermöge $\Psi(B)$ für $B_I \in \mathcal{M}_I$.

2. Ist M_R ein S.G., so ist auch die Umkehrung von 1. richtig.

Beweis:

1. Sei $r^{(J)} \rightarrow r^{(I)} \rightarrow B_I \rightarrow 0$ exakt. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 [M, r^{(J)} \otimes_I M] & \longrightarrow & [M, r^{(I)} \otimes_I M] & \xrightarrow{f} & [M, B \otimes_I M] & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Psi(r^{(J)}) & & \uparrow \Psi(r^{(I)}) & & \uparrow \Psi(B) & & \\
 r^{(J)} & \longrightarrow & r^{(I)} & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Wegen der endlichen Erzeugbarkeit von M_R ist $[M, -]$ mit direkten Summen vertauschbar, und $\Psi(r^{(J)})$, $\Psi(r^{(I)})$ sind Isomorphismen. Es ist also lediglich die Exaktheit der oberen Diagrammzeile nachzuweisen.

f ist epimorph: Sei $g \in [M, B \otimes_I M]$; wegen der Exaktheit von $r^{(J)} \otimes_I M \rightarrow r^{(I)} \otimes_I M \cong M^{(I)} \xrightarrow{f} B \otimes_I M \rightarrow 0$ und der endlichen Erzeugbarkeit von $g(M_R)$ gibt es eine endliche Teilmenge I' von I mit $g(M) \subset f(M^{(I')})$.

Da M_R selbstprojektiv ist, ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 M^{(I')} & \xrightarrow{f} & f(M^{(I')}) \\
 & \nwarrow & \uparrow g \\
 & & M
 \end{array}$$

kommutativ ergänzbar.

Ganz entsprechend prüft man die Exaktheit an der Stelle $[M, r^{(I)} \otimes_I M]$ nach.

2. M_R ist selbstprojektiv:

Da M_R ein S. G. ist, läßt sich jede exakte Folge $M \rightarrow M/U \rightarrow 0$ in der Form $r \otimes M \xrightarrow{r} [M, U] \otimes M \rightarrow 0$ schreiben.

Aus der Exaktheit der unteren Zeile des komm. Diagramms

$$\begin{array}{ccc} [M, r \otimes M] & \longrightarrow & [M, r/[M, U] \otimes M] \longrightarrow 0 \\ \uparrow r & & \uparrow r \\ r & \longrightarrow & r/[M, U] \longrightarrow 0 \end{array}$$

folgt man mit der Voraussetzung die Exaktheit der oberen.

M_R ist endlich erzeugt:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Kette mit $U_i \subsetneq M_R$ für $i \in I$. Damit ist $([M, U_i])_{i \in I}$ eine Kette von echten Rechtsidealen von r , und $J = \bigcup_{i \in I} [M, U_i]$ ist ein echtes Rechtsideal von r .

Da $JM = M$ wegen $[M, M/JM] = [M, r/J \otimes M] = r/J$ zu $J = r$ äquivalent ist, folgt man aus $[M, U_i] M = U_i$:

$$\bigcup U_i = \bigcup ([M, U_i] M) = (\bigcup [M, U_i]) M = JM \subsetneq M.$$

Bemerkungen 1.8.:

1. Die Umkehrung von 1.7,1 ist i.a. nicht richtig: Wähle $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ ist weder endlich erzeugt noch selbstprojektiv, während für $B \in \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ gilt:

$B = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Q}_i$ und damit

$$[\mathbb{Q}, B \otimes \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}, \bigoplus \mathbb{Q}_i] = \bigoplus \mathbb{Q}_i = B,$$

wie man aus der Exaktheit der Folge

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}_i \rightarrow [\mathbb{Q}, \bigoplus \mathbb{Q}_i] \rightarrow [\mathbb{Z}, \bigoplus \mathbb{Q}_i] \rightarrow 0$$

ersieht.

2. Ohne übergeordnete Voraussetzung hat man die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(1) Ψ ist ein fkt. Isomorphismus

(2) (i) Ist $B_I \longrightarrow C_I \longrightarrow 0$ exakt, so ist M_R projektiv für die Folge $B \otimes M \longrightarrow C \otimes M \longrightarrow 0$

(ii) Für ein bel. induktives System $(B_i)_{i \in I}'$, $B_i \in \mathcal{M}_I$, gilt $[\bar{M}, \varinjlim (B_i \otimes M)] \simeq \varinjlim [\bar{M}, B_i \otimes M]$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) zeigt man wie 1.7. Teil 2)

(2) $\Rightarrow$ (1): Man kann sich auf den Fall beschränken, daß B_I endlich erzeugt ist, denn:

$B_I = \varinjlim B_i$, wobei $(B_i)_{i \in I}'$ ein induktives System ist und $B_i \in \mathcal{M}_I$ für $i \in I$ endl. erzeugt ist.

Da $-\otimes_I M$ mit $\varinjlim$ vertauschbar ist, folgt $[\bar{M}, B \otimes M] \simeq [\bar{M}, \varinjlim (B_i \otimes M)] \simeq \varinjlim [\bar{M}, B_i \otimes M]$.

Es ist also nur $[\bar{M}, B_i \otimes M] \simeq B_i$ zu zeigen.

Mit einer exakten Folge $I^m \longrightarrow I^n \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$

verfährt man unter Ausnutzung von (i) wie in 1.7.

Teil 1.

1.3., 1.4., 1.7 (Teil 1) lassen sich zur folgenden Verallgemeinerung des 1. Morita - Theorems zusammensetzen (vgl. [2]).

SATZ 1.9.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\mathcal{M}$ ist gegen R -Untermoduln abgeschlossen, und

$F': \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_I$ ist eine Äquivalenz mit Inversem

$G' = - \otimes_I M$.

(2) M_R ist ein endlich erzeugter, selbstprojektiver S. G.

(3) M_R ist ein Σ - S. G., und ${}_I M$ ist treu - flach.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ gegen Untermoduln und Quotienten in $\mathcal{M}_R$, ist dies klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir zeigen: Ist M_R ein selbstprojektiver S. G., so ist M_R ein ε - S. G. Aus 1.3. folgt dann die Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$, gemäß 1.4. ist F' voll - treu, und nach 1.7., Teil 1, berührt F' alle Isomorphieklassen von $\mathcal{M}_T$.

Induktion nach n : Nach Vor. erzeugt M alle Untermoduln von $M^1 = M$.

Sei $A \subset M^n$, $n \geq 2$. Das folgende kommutative Diagramm hat exakte Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & M^{(I)} & \longrightarrow & M^{(I)} \oplus M^{(J)} & \longrightarrow & M^{(J)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow (f, g') & \nearrow g' & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & \text{in}^{-1}(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \text{pr}(A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\text{in}} & M^n & \xrightarrow{\text{pr}} & M^{n-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Die Existenz von Epimorphismen f , g folgt nach Ind. Vor., die Existenz von g' aus der Selbstprojektivität von M_R . Mit dem Schlangenlemma folgert man, daß (f, g') epimorph ist.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Sowohl (1) als auch (3) impliziert, daß M_R ein ε - S. G. ist. Gemäß 1.4. ist damit ${}_T M$ flach, und F' induziert eine Äquivalenz $\mathcal{M} \xrightarrow{F'} \mathcal{M}/{}_T \text{Ker}(G)$.
 $\mathcal{M}_T / \text{Ker}(G) = \mathcal{M}_T$ (d.h. $\text{Ker}(G) = 0$) ist damit gleichbedeutend, daß ${}_T M$ treu - flach ist.

1.9. hat eine Fülle von Konsequenzen für die Funktoren $F = [M, -]: \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_\Gamma$ und $G = - \otimes_\Gamma M: \mathcal{M}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_R$, von denen nur einige aufgeführt werden sollen. Beispiele folgen in § 3.

Folgerung 1.10: M_R sei ein endl. erzeugter, selbstprojektiver S. G. $A_R \in \mathcal{M}_R$, $B_\Gamma \in \mathcal{M}_\Gamma$. Neben den Aussagen von 1.5. hat man

1. $[M, A]_\Gamma$ ist genau dann artinsch (noethersch), wenn $T_M(A)_R$ art. (noeth.) ist.
2. Für $X_R \subset A_R$ ist $[M, X]_\Gamma$ genau dann einfach bzw. groß, klein oder maximal in $[M, A]_\Gamma$, wenn entsprechendes auf $T_M(X) \subset T_M(A)$ zutrifft.
3. So $[M, A]_\Gamma = [M, \text{So } T_M(A)_R]$, Ra $[M, A]_\Gamma = [M, \text{Ra } T_M(A)_R]$.
- 1'. B_Γ ist genau dann artinsch (noethersch), wenn $B \otimes_\Gamma M_R$ art. (noeth.) ist.
- 2'. Für $Y_\Gamma \subset B_\Gamma$ ist Y_Γ genau dann einfach bzw. groß, klein oder maximal in B_Γ , wenn Entsprechendes auf $Y \otimes M_R \subset B \otimes M_R$ zutrifft.
- 3'. So $(B \otimes_\Gamma M_R) = \text{So } (B_\Gamma) \otimes M$, Ra $(B \otimes_\Gamma M_R) = \text{Ra } (B_\Gamma) \otimes M$
- 4'. B_Γ ist genau dann injektiv, wenn $B \otimes M_R$ M-injektiv ist.

Aussagen für die Spezialfälle M_R , Γ_Γ und T_R , M^*_Γ sind wieder unmittelbar abzulesen.

Beweis:

1., 2., 3. folgen aus der Verbandsisomorphie

$\mathcal{U}_R(T_M(A)) \ni A' \mapsto [M, A'] \in \mathcal{U}_T([M, A])$ (vgl. Beweis von 1.5.).

Die übrigen Aussagen erhält man entsprechend.

Bemerkungen 1.11:

1. Für die Erhaltung und Reflexion der Eigenschaft "klein" durch F , sowie die Gleichung $Ra[M, A]_T = [M, RaT_M(A)_R]$ genügt es, M_R als endlich erzeugt und selbstprojektiv vorauszusetzen. Siehe [6] und [7].
2. Ist $R=K$ ein Schiefkörper und $\dim_K(M) = \infty$, so sind beispielsweise 3. und 4' aus 1.10 verletzt:
 Δ ist offensichtlich das Ideal der endlichwertigen Endomorphismen von M_K und $So(r_T) = \Delta \triangleleft T = [M, SoM_R]$. Ferner ist $T/\Delta \otimes M_R$ injektiv, während $(T/\Delta)_T$ nicht injektiv ist ([13]). Die Radikalformel in 1.10./3. ist für Generatoren, sogar für endlich erzeugte Generatoren, i.a. verletzt (siehe § 4).
3. Ist M_R ein endl. erzeugter, selbstprojektiver S.G., so sind äquivalent: (1) $\mathcal{M}$ ist gegen direkte Produkte in $\mathcal{M}_R$ abgeschlossen.
 (2) T^M ist endlich erzeugt und projektiv.

(Eine ähnliche Aussage unter der zusätzlichen Voraussetzung " M_R treu", findet sich auch in der Arbeit von K. Fuller [23]).

Beweis: $\mathcal{M}$ ist eine Grothendieckkategorie mit Generator, insbesondere eine Kategorie mit dir. Produkten und die Äquivalenz $G' = - \otimes_T M$ erhält direkte Produkte. Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ gegen direkte Produkte in $\mathcal{M}_R$ bedeutet also Vertauschbarkeit von G mit Produkten, was gemäß [9] dazu äqui-

valent ist, daß ${}_rM$ endlich präsentierbar ist. Da ${}_rM$ flach ist, deckt sich letzteres mit (2).

4. Ist M_R ein endl. erzeugter, selbstproj. S.G., so wird gemäß 1.9. Projektivität durch F erhalten, i.a. jedoch nicht reflektiert. Explizit: $[M, A]_r$ ist genau dann projektiv in $\mathcal{M}_r$, wenn $T_M(A)_R$ in $\mathcal{M}_R$ für die Objekte von $\mathcal{M}$ projektiv ist.

Für $n \notin \{0, 1, -1\}$ ist beispielsweise $M = \mathbb{Z}/(n)$ ein endl. erzeugter, selbstproj. S.G. über $R = \mathbb{Z}$, jedoch nicht projektiv, während $F(M) = {}_r r$ projektiv ist.

Unter der Zusatzvoraussetzung $MT = M$ reflektiert F Projektivität, und Satz 1.9. läßt sich verschärfen (§2).

§ 2 Charakterisierung von perfekten Koinjektoren. Folgerungen

Definition 2.1.

1. M_R heißt ein Koinjektor, falls für jeden in $\mathcal{M}_R$ injektiven Modul A_R der Modul $F(A)_\Gamma$ in $\mathcal{M}_\Gamma$ injektiv ist.
2. M_R heißt ein perfekter Koinjektor, falls für jede injektive Hülle $A_R \hookrightarrow B_R$ in $\mathcal{M}_R$ die Folge $F(A)_\Gamma \hookrightarrow F(B)_\Gamma$ in $\mathcal{M}_\Gamma$ eine injektive Hülle ist. (vgl. die Bezeichnungen in [1]).

Die folgende Charakterisierung der Koinjektoren ist wohlbekannt.

SATZ 2.2.: Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) M_R ist ein Koinjektor
- (2) ${}_\Gamma M$ ist flach

Beweis:

Zu einer exakten Folge $0 \rightarrow B'_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$ und $Q_R \in \mathcal{M}_R$ betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [B, FQ] & \longrightarrow & [B', FQ] \dashrightarrow 0 \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ [GB, Q] & \longrightarrow & [GB', Q] \dashrightarrow 0 \end{array}$$

Ist ${}_\Gamma M$ flach (d.h. G exakt) und Q_R injektiv, so ist die untere und damit die obere Diagrammzeile exakt.

Ist umgekehrt M_R ein Koinjektor, so sind für einen injektiven Modul Q_R wiederum beide Zeilen exakt. Das bedeutet $[K, Q] = 0$, falls K den Kern von $GB' \rightarrow GB$ bezeichnet. Spezielle Wahl von Q als injektiver Kogenerator liefert $K=0$.

Beispiele 2.3.: Sei $R=\mathbb{Z}$.

1. $Q_{\mathbb{Z}}$ ist ein Koinjektor, da Q über seinem $\mathbb{Z}$ -Endomorphismenring

$[Q, Q] = Q$ flach ist. $Q_{\mathbb{Z}}$ ist kein perfekter Koinjektor:
 $[Q, \mathbb{Z}] = 0$, während $\mathbb{Z} \hookrightarrow Q$ eine injektive Hülle in $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$
 ist.

2. Die Prüfergruppe $\mathbb{Z}(p^{\infty})_{\mathbb{Z}}$ zu einer Primzahl p ist kein Koinjektor, da sie injektiv ist, während ihr $\mathbb{Z}$ -Endomorphismenring, der Ring $\mathbb{Z}_p$ der ganzen p -ad. Zahlen nicht injektiv ist. Aus 2.2. ersieht man, daß $\mathbb{Z}(p^{\infty})$ über $\mathbb{Z}_p$ nicht flach (vgl. hierzu 2.5.).

Als wesentlich handlicher im Hinblick auf Anwendungsbeispiele als 2.2. erweisen sich die folgenden Beschreibungen von perfekten Koinjektoren für Moduln $M = MT$, selbstprojektive Moduln und abelsche Gruppen (bzw. Moduln über Hauptidealringen).

Aus § 1 geht hervor, daß jeder $\mathbb{Z}$ -S.G. $M_{\mathbb{R}}$ ein perfekter Koinjektor ist. Wir vermuten, daß die Umkehrung i.a. falsch ist. Für die oben genannten Klassen von Moduln jedoch sind die Begriffe "perfekter Koinjektor", "S.G." und " $\mathbb{Z}$ -S.G." gleichwertig.

Zur Illustration wird der konkrete Fall $R = \mathbb{Z}$ an den Anfang gestellt (die Verallgemeinerungsfähigkeit auf Hauptidealringe ist offenkundig). Mit Hilfe des folgenden Struktursatzes läßt es sich, wie mit Beispielen belegt wird, i.a. mühelos entscheiden, ob eine abelsche Gruppe ein perfekter Koinjektor ist oder nicht.

SATZ 2.4.: Für eine abelsche Gruppe $M_{\mathbb{Z}}$, $\Gamma = \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $M_{\mathbb{Z}}$ ist ein S.G.
- (2) $M_{\mathbb{Z}}$ ist ein $\mathbb{Z}$ -S.G.
- (3) M ist gegen Untergruppen abgeschlossen

- (4) $M_{\mathbb{Z}}$ ist ein perfekter Koinjektor
- (5) $F = [M, -]: \mathcal{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{M}_1$ erhält wesentliche Erweiterungen
- (6) Falls M keine Torsionsgruppe ist, ist $M_{\mathbb{Z}}$ ein Generator. Ist M eine Torsionsgruppe, so gilt für jede Primärkomponente M_p von M : M_p ist reduziert, oder der reduzierte Anteil von M_p ist unbeschränkt.

Bemerkung:

Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (6) findet sich für p -Gruppen bereits in [10].

Beweis:

Wir zeigen (6) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (1) (6) $\Rightarrow$ (3): Ist M keine Torsionsgruppe, so gilt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$. Sei also M eine Torsionsgruppe, $M = \bigoplus_{p \text{ prim}} M_p$. Dann ist jedes Objekt A von $\mathcal{M}$ eine Torsionsgruppe, und jede zyklische Untergruppe von A ist eine endliche direkte Summe von zyklischen p -Gruppen. Es genügt also, den Fall einer p -Gruppe M zu betrachten. Sei $A \in \mathcal{M}$ und $\mathbb{Z}/(p^i) \subset A$.

1. Fall: M ist beschränkt. Dann ist M direkte Summe von zyklischen p -Gruppen, und wegen $A = \bigcup_{f \in [M, A]} B_i(f)$ enthält M einen Summanden $\mathbb{Z}/(p^k)$ mit $k > i$.

2. Fall: M ist unbeschränkt und reduziert. Gemäß [8] (S. 22, Exerc. 27) besitzt M dann zyklische direkte Summanden beliebig hoher Ordnung.

3. Fall: M ist unbeschränkt und nicht reduziert. Da M direkte Summe einer teilbaren Untergruppe M_1 und einer nach Vor. unbeschränkten, reduzierten Untergruppe M_2 ist, folgt die Behauptung wie im 2. Fall.

(3) $\Rightarrow$ (2): trivial

(2) $\Rightarrow$ (4): § 1, 1.5.

(4) $\Rightarrow$ (5): trivial

(5) $\Rightarrow$ (6): Ist M keine Torsionsgruppe, d.h. $\mathbb{Z} \hookrightarrow M$, so enthält die injektive Hülle von $M_{\mathbb{Z}}$ einen zu $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ isomorphen direkten Summanden, insbesondere hat man $[M, \mathbb{Q}] \neq 0$. Wendet man die Vor. auf die wesentliche Erweiterung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ an, so erhält man $[M, \mathbb{Z}] \neq 0$, d.h. $M_{\mathbb{Z}}$ ist ein Generator.

Sei nun M eine Torsionsgruppe und etwa M_p (p prim) nicht reduziert, d.h. $M_p = M_1 \oplus M_2$, wobei $0 \neq M_1$ teilbar (d.h. $M_1 = \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus M_1'$), M_2 reduziert ist. Man nimmt an, es gelte $p^n M_2 = 0$ und betrachtet den Homomorphismus

$$f: M \xrightarrow{\text{pr}} M_p \xrightarrow{p^n} \mathbb{Z}(p^\infty) \oplus M_2 \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$$

Offensichtlich ist $f \neq 0$, und da $[M, \mathbb{Z}/(p)]_{\Gamma} \hookrightarrow [M, \mathbb{Z}(p^\infty)]_{\Gamma}$ nach Vor. wesentlich ist, gibt es $g \in \Gamma$ mit $0 \neq fg \in [M, \mathbb{Z}/(p)]$; insbesondere hat man $\text{Bi}(g) \subset f(\mathbb{Z}/(p))$.

Wegen $\bar{f}(\mathbb{Z}/(p)) = \text{Ke}(\text{pr}) \oplus N$ mit $p^{n+1}N = 0$ folgt für

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 \in [M, \text{Ke}(\text{pr})], \quad g_2 \in [M, N]: 0 \neq fg = fg_2 \text{ mit } g_2 \in [M, N] = [M_p, N] = [M_1, N] \oplus [M_2, N].$$

Da M_1 teilbar, N beschränkt ist, gilt $[M_1, N] = 0$, und $p^n M_2 = 0$ impliziert $p^n \text{Bi}(g_2) = 0$. Das bedeutet aber $fg_2 = 0$ im Widerspruch zur Wahl von g .

(1) $\Rightarrow$ (6): Falls M keine Torsionsgruppe ist, enthält M eine zu $\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppe, welche nach Vor. von $M_{\mathbb{Z}}$ erzeugt wird.

Im Falle einer Torsionsgruppe M kann man o.E. annehmen, M sei eine nicht reduzierte p -Gruppe, $M = M_1 \oplus M_2$, wobei $0 \neq M_1$ teilbar,

M_2 reduziert ist. Da M_1 zyklische Untergruppen beliebig hoher Ordnung n besitzt, folgt aus $\mathbb{Z}/(p^n) = \sum \text{Bi}(f) = \sum \text{Bi}(f)$
 $f \in [M, \mathbb{Z}/(p^n)] \quad f \in [M_2, \mathbb{Z}/(p^n)]$

die Unbeschränktheit von M_2 .

(6) $\Rightarrow$ (1): Spezialfall von (6) $\Rightarrow$ (3).

In [18] wird für eine p -Gruppe $M = M_1 \oplus M_2$, M_1 teilbar, M_2 reduziert, gezeigt: Ist M_2 unbeschränkt, so ist ${}_r M$ flach.

Satz 2.4. liefert alle über ihrem Endomorphismenring flachen Torsionsgruppen (=Koinjektoren über $\mathbb{Z}$).

Folgerung 2.5.: Für eine Torsionsgruppe $M_{\mathbb{Z}}$ sind äquivalent

- (1) ${}_r M$ ist flach
- (2) Für jede Primzahl p ist die Primärkomponente M_p reduziert, oder ihr reduzierter Anteil ist unbeschränkt.

Beweis:

§ 1, 1.2. zufolge kann man sich auf den Fall beschränken, daß M eine p -Gruppe ist.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ist mit 2.4. und 2.1. klar

(1) $\Rightarrow$ (2): o.E. $M = M_1 \oplus M_2$ mit $0 \neq M_1$ teilbar (d.h. $M_1 = \mathbb{Z}(p^\infty \oplus M_1')$), M_2 reduziert. Gemäß § 1, 1.2. erzeugt $M_{\mathbb{Z}}$ alle Kerne von Homomorphismen $M^n \rightarrow M$, insbesondere für $n \in \mathbb{N}$ den Kern von $M \xrightarrow{p^n} M$. Da $\mathbb{Z}(p^\infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung p^n enthält, hat der Kern die Ordnung p^n . Aus $[M, \text{Ker}(p^n)] = [M_2, \text{Ker}(p^n)]$ folgt die Behauptung.

Beispiele 2.6.:

1. Jede direkte Summe von zyklischen abelschen Gruppen, insbesondere jede beschränkte abelsche Gruppe, ist ein perfekter Koinjektor.

2. Ein direktes Produkt von zyklischen Torsionsgruppen ist genau dann ein perfekter Koinjektor, wenn es beschränkt ist.
3. Zwei Spezialfälle: Die Gruppen $\pi^{\mathbb{Z}}_{(q)}$, $\pi^{\mathbb{Z}}_{(p^i)}$
 $q \text{ prim } i \in \mathbb{N}$
sind keine perfekten Koinjektoren, während die Torsionsuntergruppen perfekte Koinjektoren sind.

Beweis:

1. und eine Richtung von 2. sind mit 2.4. klar.
2. Sei M ein unbeschränktes Produkt von zyklischen Torsionsgruppen. Insbesondere ist M keine Torsionsgruppe und gemäß 2.4. genau dann ein perfekter Koinjektor, wenn $M_{\mathbb{Z}}$ ein Generator ist. Letzteres ist damit gleichwertig, daß M einen zu $\mathbb{Z}$ isomorphen direkten Summanden enthält, was, wie folgt, nicht der Fall ist.
Jede zyklische Torsionsgruppe $\mathbb{Z}_{(n)}$ ist rein-injektiv, da jede rein-exakte Folge $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{(n)} \rightarrow A$ zerfällt (vgl. [8]). Also ist M rein-injektiv.

$\mathbb{Z}$ ist nicht rein-injektiv: Die Einbettung

$$\Delta: \mathbb{Z} \ni z \longmapsto (\bar{z}) \in \pi^{\mathbb{Z}}_{(q)} =: A \text{ ist rein}$$

$q \text{ prim}$

(für $z \in \mathbb{Z}$, $p \text{ prim}$ gilt: $(\bar{z}) \in \Delta(\mathbb{Z}) \cap A p^n \iff z \equiv 0 \pmod{p}$
 $\iff (\bar{z}) \in \Delta(\mathbb{Z}) p^n$), zerfällt jedoch nicht, da $0 \neq A / \Delta(\mathbb{Z})$
teilbar ist, A reduziert.

Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ damit kein direkter Summand von M .

3. Die Torsionsuntergruppen von $\pi^{\mathbb{Z}}_{(q)}$ und $\pi^{\mathbb{Z}}_{(p^i)}$
 $q \text{ prim } i \in \mathbb{N}$
sind reduziert.

Eine befriedigende Charakterisierung der perfekten Koinjektoren ist weiter, wie angekündigt, für T-accessible sowie für selbstprojektive Moduln M_R möglich.

Zunächst wird einige Information über die Bedingung $MT=M$ zusammengestellt, welche sich auch in den anschließenden Paragraphen als äußerst nützlich erweist.

Wesentliche Erweiterungen werden in der Form $A_R \hookrightarrow B_R$ mitgeteilt.

Lemma 2.7.: a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) MT = M$$

$$(2) \Delta M = M$$

$$(3) \text{ Für } A_R \in \mathcal{M}_R, B_R \hookrightarrow [M, A]_R \text{ gilt: } B\Delta_R \hookrightarrow B_R$$

b) Aus $MT = M$ folgt:

$$(1) T^2 = T$$

$$(2) \Delta^2 = \Delta$$

$$(3) T_M(A) = AT \text{ für } A_R \in \mathcal{M}_R$$

Beweis:

a) (1) $\Leftrightarrow$ (2): Der Gleichung $m(f, n) = [m, f]n$ für $m, n \in M$ entnimmt man $MT = \Delta M$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Für $0 \neq f \in B$ gilt $0 \neq f(M) = f(\Delta M)$, d.h. $0 \neq f\Delta \hookrightarrow B\Delta$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Die Annahme $MT \subsetneq M$ führt mit (3) zu dem Widerspruch $[M, \frac{M}{MT}] \Delta \neq 0$.

b) (1): Für $(f, m) \in T$ hat man mit $m = \sum m_i(f_i, n_i)$:
 $(f, m) = \sum (f_i, m_i)(f_i, n_i) \in T^2$

(2): Für $[m, f] \in \Delta$ folgt mit $m = \sum [m_i, f_i] n_i$:
 $[m, f] = \sum [m_i, f_i] [n_i, f] \in \Delta^2$

(3): $T_M(A) \subset AT$ ist klar.

Sei umgekehrt $a = \sum a_i(f_i, m_i) \in AT$. Aus $a = \sum g_i(m_i)$, wobei
 $g_i: M \xrightarrow{f_i} R \xrightarrow{a_i} A$, ersieht man $a \in T_M(A)$.

Lemma 2.8.: (vgl. Beispiel 2.8. a) auf Seite 30)

Ist $MT = M$ oder M selbstprojektiv, so folgt für $A, B \subset M^n, n \in \mathbb{N}$:

1. $T_M(A+B) = T_M(A) + T_M(B)$
2. $A \subset B, T_M(B) \subset A \Rightarrow T_M(B/A) = 0$

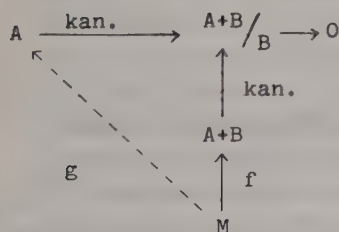
Beweis:

Für $MT = M$ ist die Behauptung klar.

Sei M selbstprojektiv. Die 1. Bedingung folgt aus

$$[M, A+B] = [M, A] + [M, B] \quad (\text{vgl. [7]}):$$

Für $f \in [M, A+B]$ entnimmt man aus dem folgenden kommutativ ergänzbaren Diagramm $f = g + (f-g)$ mit $g \in [M, A], (f-g) \in [M, B]$.



Die 2. Bedingung ist klar, da $f \in [M, B/A]$ sich nach Vor. über $B \xrightarrow{\text{kan.}} B/A$ faktorisieren läßt.

SATZ 2.9.: Erfüllt M_R die Bedingungen 1. und 2. aus 2.8. für $A, B \subset M^n$, $n \in \mathbb{N}$ - dies trifft zu, falls $MT = M$ oder M_R selbstprojektiv ist - so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) M_R ist ein S.G.
- (2) M_R ist ein I-S.G.
- (3) M_R ist ein perfekter Koinjektor
- (4) $F: \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_T$ erhält wesentliche Erweiterungen
- (5) Ist X_R einfach, $X_R \hookrightarrow A_R$ wesentlich und $[M, X] = 0$, so folgt $[M, A] = 0$
- (6) Ist M'_R ein überdachter Untermodul von M_R , so gilt $[M, \text{So}(M/M')_R] \neq 0$ +)
- (7) $\mathcal{M}$ ist gegen R-Untermoduln abgeschlossen
- (8) F' ist voll - treu, und G' (bzw. G) ist exakt

Für den Fall $MT = M$ sind (1) - (8) weiter äquivalent zu

- (9) T_R ist ein S.G.
- (10) Für $A_R \in \mathcal{M}_R$ sind alle R-Untermoduln von AT T-accessibel
- (11) $R^{(R/T)}$ ist flach

Bemerkungen:

1. Die Anwendung der Bedingung (4) auf überdachte R-Untermoduln von $A \in \mathcal{M}$ im Schritt (5) $\Rightarrow$ (7) wurde durch eine entsprechende Schlußweise in der Arbeit von Anderson ([1]) angeregt. Die dort gegebene Charakterisierung perfekter Injektoren (vgl. Einleitung) weist eine starke Symmetrie zum Fall $MT = M$ in 2.9. auf:

+) M' heißt ein überdachter Untermodul von M , falls $\text{So}(M/M')_R$ einfach und in M/M' wesentlich ist.

Ist M_R endlich erzeugt und projektiv, so sind äquivalent:

- (i) $M \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält injektive Hüllen
- (ii) $M \otimes_R - : {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält wesentliche Erweiterungen
- (iii) $(R/T)_R$ ist flach

(Ausnutzung der Adjungiertheit von $- \otimes_R M$ und $[M, -]$ in diesem Zusammenhang ist an die sehr starke Voraussetzung " ${}_R M$ ist endl. erzeugt und projektiv" gebunden. Auch in diesem Fall ist keine Abhängigkeit zwischen Andersons Ergebnis und 2.9. erkennbar).

2. Die Äquivalenz (2) $\Leftrightarrow$ (8) ist eine Ergänzung zu § 1, Satz 1.4.

3. Eine Reihe von Implikationen in 2.9. ist ohne Voraussetzung über M_R richtig, etwa (1) $\Leftrightarrow$ (4) oder

$$(2) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6).$$

Die entscheidenden Schritte, etwa (1) $\Rightarrow$ (3) oder

$$(1) \Rightarrow (2), \text{ sind i.a. falsch, wie ein Beispiel von}$$

F. Dischinger zeigt. Er gab einen Selbstgenerator M_R an, der über seinem Endomorphismenring nicht flach ist, d.h. M_R ist kein Σ -S.G. bzw. kein Koinjektor. Allgemein hat man die Äquivalenz:

(M_R ist ein Σ -S.G. $\Leftrightarrow$ M_R ist ein S.G. und erfüllt die Bed. 1. und 2., welche in 2.9. vorausgesetzt wurden).

Bei Verzicht auf T-Accessibilität von M hat man i.a.

keine Brücke zwischen (1) - (8) und (9) - (11): Für $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}(p^\infty)$ sind (9) - (11) erfüllt, während jede der Aussagen (1) - (8) verletzt ist.

Beweis:

Wir zeigen zunächst (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) und (2) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (4): Sei $X_R \hookrightarrow {}^1A_R$. Zu $0 \neq f \in [M, A]$ gibt es dann $m \in M$ mit $0 \neq f(m) \in X$. Nach Vor. ist $m = \sum f_i(m_i)$ mit $m_i \in M$, $f_i \in [M, mR] \subset R$; $\sum f_i(m_i) \neq 0$ impliziert $ff_j \neq 0$ für ein j . $f(mR) \subset X$ bedeutet $ff_j \in [M, X]$.

(4) $\Rightarrow$ (5): trivial

(5) $\Rightarrow$ (7): Für $A \in \mathcal{N}$, $x \in A$ nimmt man an, es gelte $x \notin T_M(xR)$. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es dann einen R -Untermodul X von A , welcher hinsichtlich der Eigenschaften $T_M(xR) \subset X$ und $x \notin X$ maximal ist, d.h. X ist ein maximaler Untermodul von $X + xR$ und die Inklusion $X + xR / X \hookrightarrow A / X$ ist wesentlich. Aus $T_M(X + xR) = T_M(X) + T_M(xR) \subset X$ schließt man $T_M(X + xR / X) = 0$, d.h. $[M, X + xR / X] = 0$. Nach Vor. bedeutet dies $[M, A / X] = 0$, was im Widerspruch zu $X \subsetneq A$ und $A \in \mathcal{N}$ steht.

(7) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1): trivial

(2) $\Rightarrow$ (8): § 1, 1.4.

(8) $\Rightarrow$ (3): Vorbemerkung zu § 1, 1.5.

(3) $\Rightarrow$ (6): Sei M' ein überdachter R -Untermodul von M , d.h. $So (M'/M)$ ist einfach und groß in M/M' . Aus $[M, M/M'] \neq 0$ folgt mit (3) die Behauptung.

(6) $\Rightarrow$ (1): Wie in "(5) $\Rightarrow$ (7)" zeigt man $m \in T_M(mR)$ für $m \in M$.

Sei nun $MT = M$. Gemäß 2.7. ist T ein idempotentes Ideal von R , und die Spur von M_R auf A_R , $T_M(A) = AT$, stimmt mit der Spur von T_R auf A_R überein (insbesondere ist T_R T -accessibel). Die Bedingungen (7) und (10) decken sich also, und die Äquivalenz (9) $\Leftrightarrow$ (10) ist ein Spezialfall von (7) $\Leftrightarrow$ (1).

(9) $\Leftrightarrow$ (11): Daß T_R ein S.G. ist, ist offensichtlich mit $t \in tT$ für $t \in T$ gleichwertig, letzteres ist gemäß [3] (S. 33, Cor.) zu (11) äquivalent.

Folgerungen 2.10:

1. Sei R beliebig. Ein idempotentes Rechtsideal I von R ist genau dann ein perfekter Koinjektor, wenn I_R ein S.G. ist.

Beweis:

Wegen $T_I(R) = RI$ (" $\subset$ " folgt aus der Idempotenz von I , für " $\supset$ " betrachte man zu $r \in R$ den Homomorphismus $I \ni i \mapsto ri \in R$) folgt die Behauptung aus 2.9.

2. Ist R (von Neumann) regulär, so ist jeder T -accessible Modul M_R ein perfekter Koinjektor. Insbesondere ist jeder projektive Modul M_R , sowie jedes Rechtsideal von R ein perfekter Koinjektor.

Spezialfall:

Ist $R = K$ ein Schiefkörper, so ist das Ideal $\Delta = \{f \in \Gamma : \text{Rang}(f) < \infty\}$ von Γ als Γ -Links- und Rechts-Modul ein perfekter Koinjektor.

Bemerkung 2.11.:

Ist $MT = M$ ein S.G., so sind gemäß 2.9. M und T $\mathcal{L}$ -Selbstgeneratoren, und die Eigenschaften von M und T hinsichtlich der Unterkategorie $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_R$ sind völlig symmetrisch. Insbesondere bemerkt man $\mathcal{M} = \mathcal{M}_T / \text{Ker}(-\otimes_P M) = \mathcal{M}_T / \text{Ker}(-\otimes_P T)$, falls

$$r' = \text{End}_R(T_R) \text{ (vgl. 1.4.)}.$$

Aus 1.5. entnimmt man ferner, daß F injektive Hüllen nicht nur erhält, sondern in gewissem Sinne auch reflektiert; außerdem reflektiert F Kettenbedingungen. $T_M(A)$ läßt sich in 1.5. jeweils durch AT ersetzen. Es gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned} [M, A]_r \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow A_R \text{ ist } M\text{-injektiv (oder } T\text{-injektiv)} \\ &\Leftrightarrow AT_R \text{ ist } M\text{-injektiv (oder } T\text{-injektiv)} \end{aligned}$$

$$[M, A]_r \text{ ist selbstinjektiv} \Leftrightarrow AT_R \text{ ist selbstinjektiv}$$

Man erhält nun mühelos die angekündigte Verschärfung von 1.9. für einen T -accessiblen Modul M .

SATZ 2.12.: Gilt $MT = M$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\mathcal{M}$ ist gegen R -Untermodule abgeschlossen, und
 $F' = [M, -] : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_T$ ist eine Äquivalenz mit Inversem
 $G' = -\otimes_P M$.
- (2) M_R ist ein endlich erzeugter, projektiver S.G.
- (3) M_R ist ein S.G., und rM ist treu-flach.

Bemerkungen:

Ohne die Vor. " $MT = M$ " ist 2.12. i.a. falsch; vgl. 1.11., Bemerkung 4.

Ist M ein endlich erzeugter, projektiver S.G., so hat man Erhaltungs- und Reflexionseigenschaften von M vollständig im Griff (vgl. 1.5., 1.10., 2.14). In 1.11., Bemerkung 2,

wurde darauf hingewiesen, daß die Aussagen über F und G , die sich aus 2.12. folgern lassen, für projektive Generatoren bzw. für endlich erzeugte Generatoren, jeweils z. T. verletzt sind.

Beweis:

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Man bemerkt, daß ein S.G. $M = MT$ ein Σ -S.G. ist (2.9.), und wendet 1.9. an.

(2) $\Rightarrow$ (1) ist ein Spezialfall von 1.9.

(1) $\Rightarrow$ (2): Gemäß 1.9. ist M_R endlich erzeugt. Die Projektivität von $M = MT$ geht aus dem folgenden - eigenständig interessanten - Lemma hervor.

Lemma 2.13.: Gilt $MT = M$ und (1) aus Satz 2.12., so sind für $f: A_R \rightarrow A'_R$ folgende Aussagen gleichwertig:

- (i) $f|_{AT}: AT \rightarrow A'T$ ist eine projektive Hülle in $\mathcal{M}_R$
- (ii) $[M, f]: [M, A] \rightarrow [M, A']$ ist eine projektive Hülle in $\mathcal{M}_R$.

Beweis:

Wegen (1) ist $[M, f]: [M, A] \rightarrow [M, A']$ genau dann eine projektive Hülle in $\mathcal{M}_R$, wenn $f|_{AT}: AT \rightarrow A'T$ eine projektive Hülle in $\mathcal{M}$ ist. Letzteres ist, wie folgt, dazu äquivalent, daß $f|_{AT}: AT \rightarrow A'T$ eine projektive Hülle in $\mathcal{M}_R$ ist: Eine Richtung ist klar. Sei umgekehrt $f|_{AT}$ eine projektive Hülle in $\mathcal{M}$, $g: N_R \rightarrow N'_R$ ein Epimorphismus und $h \in [AT, N']$. Offenbar ist $g' = g|_{NT}: NT \rightarrow N'T$ ein Epimorphismus in $\mathcal{M}_R$ und damit in $\mathcal{M}$; wegen $Bi(h) \subset N'T$ gibt es nach Vor. 1 $\in [AT, NT]$ mit $h = g'1 = g1$. Der Rest ist wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ gegen R -Untermoduln und -Quotienten klar.

Folgerungen 2.14.:

(vgl. 1.10) Sei M_R ein endlich erzeugter, projektiver S.G. Neben den Aussagen von 1.10., in denen man $T_M(A)$ jeweils durch AT ersetzt, gilt:

1. Für $f: A_R \longrightarrow A'_R$ sind äquivalent:

(1) $f|_{AT}: AT \longrightarrow A'T$ ist eine projektive Hülle in M_R .

(2) $[M, f]: [M, A] \longrightarrow [M, A']$ ist eine projektive Hülle in M_T .

2. Für $g: B_T \longrightarrow B'_T$ sind äquivalent:

(1) $g \otimes M: B \otimes M \longrightarrow B' \otimes M$ ist eine projektive Hülle in M_R .

(2) $g: B \longrightarrow B'$ ist eine projektive Hülle in M_T .

Ein Spezialfall: M_T^* ist genau dann projektiv, wenn T_R projektiv ist.

Beispiel 2.8. a):

Für $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$ sind die beiden Bedingungen aus 2.8. verletzt:

1. Wähle $B = \{\frac{z}{p^n} : z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$, p prim; A sei die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach (p) . Da A und B reduzierte Gruppen sind mit $A + B = \mathbb{Q}$, hat man $T_M(A) = T_M(B) = 0$ und $T_M(A+B) = A + B \neq 0$.

2. Sei $A = \mathbb{Z}$, B wie in 1.. Es gilt $A \subset B$ und $T_M(B) = 0 \subset A$.

Aus $B/A = \mathbb{Z}(p^\infty)$ folgt jedoch $T_M(B/A) = B/A \neq 0$.

§ 3 Beispiele für perfekte Koinjektoren vom Typ $M = MT$
(= Selbstgeneratoren $M = MT$)

SATZ 3.1.: Ist M_R projektiv, so ist ${}_R M$ (bzw. ${}_R \Delta$) ein perfekter Koinjektor.

Beweis:

1. Das Spurideal $\Sigma \text{Bi}(\varphi)$ von ${}_R M$ in R stimmt mit Δ überein:
 $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$

Einerseits gilt wegen der Projektivität von M_R für $m \in M$
 bzw. $\varphi \in \text{Hom}_R(M, R)$: $m = \Sigma [m_i, f_i] m$ bzw. $\varphi(m) = \Sigma [m_i, f_i] \varphi(m) \in \Delta$.
 Andererseits ist jedes Element von Δ Summe von Elementen
 $[m, f] = [-, f](m)$, wobei $[-, f] \in \text{Hom}_R(M, R)$.

2. ${}_R M = {}_R \Delta M$ ist ein S.G., da $m = \Sigma [m_i, f_i] m \in \Delta m$ für $m \in M$.

SATZ 3.2.: Ist R ein kommutativer Ring, so ist jeder projektive Modul M_R ein perfekter Koinjektor.

Beweis: Gemäß [5] ist M_R ein S.G.

Die Beobachtung, daß jeder T-accessible (insbesondere jeder projektive) Modul M_R über einem (von Neumann) regulären Ring R ein perfekter Koinjektor ist (2.10.), wird ergänzt durch

SATZ 3.3.: Ist M_R regulär im Sinne von Zelmanowitz (d.h. für $m \in M$ ist mR ein projektiver direkter Summand von M_R , [22]), so ist M_R ein perfekter Koinjektor.

Beweis:

Um $m \in mT$ für $m \in M$ einzusehen, betrachtet man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{l_m} & mR & \xrightarrow{\iota} & M \\
 & \searrow p & \parallel & \swarrow \pi & \\
 & & mR & &
 \end{array}$$

Dabei ist l_m die Multiplikation mit m , ι die Inklusion, π die Projektion; die Existenz von p folgt aus der Projektivität von M_R . Man erhält $m = l_m p \pi(m) = m(p\pi, m) \in mT$.

Folgerungen 3.4.:

1. Ist R (von Neumann) regulär und $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine Familie von Rechtsidealen von R , so ist $M_R = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i$ ein perfekter Koinjektor.
2. Ist R regulär und rechtsinjektiv, so ist jeder torsionslose Modul M_R (d.h. jeder Untermodul eines direkten Produkts von Kopien von R_R) ein perfekter Koinjektor.

Beweis:

Im 1. Fall ist M_R offensichtlich, im 2. Fall gemäß [22] (Theorem 2.10.) ein regulärer Modul.

Bemerkung 3.5.:

Ist R der Endomorphismenring eines selbstinjektiven, nicht singulären Moduls (z. B. der Endomorphismenring eines Vektorraums über einem Schiefkörper), so ist R regulär und rechtsinjektiv.

Bemerkung 3.6 (W. Zimmermann):

Ist M_R regulär, so ist ${}_R M$ regulär.

Gemäß 2.9. folgt aus der Regularität von M_R insbesondere:
 ${}_R M$ ist ein S.G., und $(\Gamma/\Delta)_R$ ist flach.

Beweis:

Sei $m \in M$: $m = m(f, m) = [m, f]m$ bedeutet gemäß [22], daß ${}_R M$ regulär ist.

Beispiele 3.7.:

Es werden zwei T-accessible Moduln angegeben, die Koinjektoren, nicht aber perfekte Koinjektoren sind.

1. Seien K ein Körper, $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^2$ und $M = eR$.
 Der endlich erzeugte und projektive Modul M_R ist flach über seinem Endomorphismenring $\Gamma = eRe \cong K$, also gemäß 2.2. ein Koinjektor.

M_R ist kein perfekter Koinjektor, da M_R kein S.G. ist:

Für $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ gilt $[M, aR] = 0$.

2. (vgl. [1]) Seien K ein Körper, $L = K[x]/(x^2) = K[x]$,
 R der folgende Unterring von L_3 :

$$R = \begin{pmatrix} K & Kx & Kx \\ 0 & K & Kx \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^2, \quad M = eR.$$

Wegen $\Gamma = eRe \cong K$ ist M_R ein Koinjektor.

${}_R T$ ist nicht flach: Für $a = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist z. B.

$aR \otimes_R T \neq 0$, während das kan. Bild von $aR \otimes_R T$ in $R \otimes_R T$ Null ist. Damit ist ${}_R (R/T)$ nicht flach ([3], S. 31 Prop. 5), und M_R kein perfekter Koinjektor (2.9.).

§ 4 Sockel und Radikal von $[M, A]_T$

Für diesen Paragraphen sei generell $MT = M$ vorausgesetzt.
(Elementare Folgerungen: siehe 2.7.).

Da T-Accessibilität projektiven Moduln und Generatoren M_R gemeinsam ist, nehmen die folgenden Betrachtungen eine Schlüsselstellung ein; davon ausgehend erhält man verschärfte Aussagen für projektive bzw. endlich erzeugte, projektive Moduln einerseits und T-accessible Selbstgeneratoren bzw. Generatoren andererseits. Ins Auge fallend ist die Symmetrie der Ergebnisse hinsichtlich der Spurideale T und A .

Die technischen Voraussetzungen für die Bestimmung von $So[M, A]_T$ bieten Satz 2.9., die Beobachtung, daß für $B_T \subset [M, A]_T$ die Inklusion $BA_T \subset B_T$ wesentlich ist (2.7.) und der folgende Satz. Der 1. Teil wurde durch B.J. Mueller ([12]) angeregt. Mit den Überlegungen von § 6 läßt sich 4.1., 1. auch aus [12], Prop. 6, folgern; hier wird ein elementarer Beweis angegeben.

Bezeichnungen:

1. Für $A_R \in \mathcal{M}_R$ sei $\mathcal{U}_R(A)$ der Verband der R -Untermodule, $\mathcal{U}_T(A)$ der Verband der T -accessiblen R -Untermodule von A (d.h. $A' \in \mathcal{U}_T(A) \iff A' \subset A$ und $A'T = A'$). Entsprechend sind für $B_T \in \mathcal{M}_T$ die Verbände $\mathcal{U}_T(B)$, $\mathcal{U}_A(B)$ definiert.
2. Sandomierski ([15]) nennt A_R T -artinsch (T -noethersch), falls A der absteigenden (aufsteigenden) Kettenbedingung für T -accessible Untermoduln genügt.

SATZ 4.1.: 1. Für $A_R \in \mathcal{M}_R$ ist

$$\psi: \mathcal{U}_T(A) \ni X \longmapsto [M, X] \Delta \in \mathcal{U}_\Delta([M, A])$$

ein Verbandsisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\varphi: \mathcal{U}_\Delta([M, A]) \ni Y \longmapsto \sum_{f \in Y} \text{Bi}(f) \in \mathcal{U}_T(A)$$

2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \mathcal{U}_T(A) = \mathcal{U}_R(AT) \quad \text{für alle } A_R$$

$$(2) \mathcal{U}_T(R) = \mathcal{U}_R(T)$$

$$(3) M_R \text{ (oder } T_R) \text{ ist ein S.G.}$$

$$(4) {}_R(R/T) \text{ ist flach.}$$

3. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$(1) \mathcal{U}_\Delta(B) = \mathcal{U}_T(B\Delta) \quad \text{für alle } B_T$$

$$(2) \mathcal{U}_\Delta(T) = \mathcal{U}_T(\Delta)$$

$$(3) \Delta_T \text{ ist ein S.G.}$$

$$(4) {}_T(T/\Delta) \text{ ist flach}$$

Bemerkungen:

1. Bereits die Existenz eines Verbandsisomorphismus

$$\mathcal{U}_R(AT) = \mathcal{U}_\Delta([M, A]) \text{ ist äquivalent dazu, daß } M_R \text{ ein S.G. ist.}$$

2. M_R ist genau dann endlich erzeugt und projektiv, wenn

$$\mathcal{U}_T(A) \ni X \longmapsto [M, X] \in \mathcal{U}_T([M, A])$$

$$\mathcal{U}_T(A) \ni \sum_{f \in Y} \text{Bi}(f) \longleftarrow Y \in \mathcal{U}_T([M, A])$$

inverse Isomorphismen sind (eine Richtung findet sich in [15]).

3. M_R ist genau dann ein Generator, wenn

$$\mathcal{U}_R(A) \ni X \longmapsto [M, X]_{\Delta} \in \mathcal{U}_{\Delta}([M, A])$$

$$\mathcal{U}_R(A) \ni \sum_{f \in Y} \text{Bi}(f) \longleftarrow Y \in \mathcal{U}_{\Delta}([M, A])$$

inverse Isomorphismen sind.

Beweis von 4.1.:

1. a) Seien $X, X' \in \mathcal{U}_T(A)$ und $X \neq X'$. Wegen $XT = X$ und $X'T = X'$ folgt $[M, X] \neq [M, X']$. Sei etwa $f \in [M, X]$, $f \notin [M, X']$. $\Delta M = M$ impliziert $f \Delta \notin [M, X']$, insbesondere $f \Delta \notin [M, X']_{\Delta}$.

b) Sei $Y \in \mathcal{U}_{\Delta}([M, A])$. Für $X := \sum_{f \in Y} \text{Bi}(f) \in \mathcal{U}_T(A)$ gilt
 $\psi(X) = Y = Y_{\Delta}$.

Eine Inklusion ist klar.

Sei $h[m, g] \in \psi(X) = [M, X]_{\Delta}$, d.h. $h(m) = \sum f_i(m_i)$

mit $f_i \in Y$, $m_i \in M$. Man verifiziert $h[m, g] = \sum f_i[m_i, g] \in Y$:

$$\begin{aligned} h[m, g]x &= h(m(g, x)) = h(m)(g, x) = \sum f_i(m_i)(g, x) = \\ &= \sum f_i(m_i(g, x)) = \sum f_i[m_i, g]x. \end{aligned}$$

2. und 3. folgen unmittelbar aus 2.9.

Folgerungen 4.2.:

Die folgenden Paare von Aussagen sind jeweils äquivalent:

1. (i) A_R ist T-artinsch (bzw. T-noethersch)
 (ii) $[M, A]_r$ ist Δ -artinsch (bzw. Δ -noethersch)
2. (i) AT_R ist endlich erzeugt (bzw. komplementiert)
 (ii) $[M, A]_{\Delta_r}$ ist endlich erzeugt (bzw. komplementiert)

Beweis:

1. ist mit 4.1. klar.

2. a) Sei AT_R endlich erzeugt und $(B_i)_{i \in I}$ eine Kette von echten Γ -Untermoduln von $[M, A] \Delta$; $(B_i \Delta)_{i \in I}$ ist wieder eine Kette mit $B_i \Delta \subsetneq [M, A] \Delta$. Nach 4.1. gibt es eine Kette (X_i) , $X_i \in \mathcal{U}_T(A)$, $X_i \subsetneq AT$ mit $\psi(X_i) = B_i \Delta$. Die Vor. besagt $\bigcup X_i \subsetneq AT$, und wegen $\bigcup X_i \in \mathcal{U}_T(A)$ folgert man: $\bigcup (B_i \Delta) = \bigcup \psi(X_i) = \psi(\bigcup X_i) \subsetneq [M, A] \Delta$. Das bedeutet $\bigcup B_i \subsetneq [M, A] \Delta$.

Die Umkehrung zeigt man entsprechend.

b) Sei AT_R komplementiert und $B_\Gamma \subset [M, A] \Delta_\Gamma$. Man hat $B \Delta = \psi(X)$ mit $X \in \mathcal{U}_T(A)$ und nach Vor. einen R -Untermodul X' von AT , welcher hinsichtlich $X + X' = AT$ minimal ist; aus $X + X'T = AT$ folgt $X' = X'T$. Man bemerkt zunächst: $B \Delta + [M, X'] \Delta = \psi(X) + \psi(X') = \psi(X + X') = [M, A] \Delta$, d.h. $B + [M, X'] \Delta = [M, A] \Delta$. Sei $Y \subset [M, X'] \Delta$ mit $B + Y = [M, A] \Delta$. Es gibt $X'' \subset X'$ mit $Y \Delta = \psi(X'')$. Aus $\psi(X) + \psi(X'') = \psi(AT)$ erhält man $X + X'' = AT$ und damit $X'' = X'$ nach Wahl von X' . $Y \Delta = [M, X'] \Delta$ bedeutet aber $Y = [M, X'] \Delta$. Die Umkehrung sieht man entsprechend ein.

Bemerkungen 4.3.:

1. Für $A = M$ erhält man aus 4.2.: M_R ist genau dann endl. erzeugt (bzw. komplementiert), wenn Δ_Γ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

I.a. hat man keine entsprechende Beziehung zwischen M_R und Γ_Γ : Γ_Γ ist stets endl. erzeugt, während dies auf M_R nicht notwendig zutrifft. Ferner ist der Endomorphismenring eines unendlichdimensionalen Vektorraums nicht komplementiert.

2. Im Spezialfall $\Delta = \Gamma$ (d.h. M_R endlich erzeugt, projektiv) münden 4.2., 1. und 2a) in Aussagen von [15].

Folgerung 4.4.:

1. Ist M_R ein S.G., so ist AT_R artinsch (noethersch), falls $[M, A]_R$ artinsch (noethersch) ist.
(Dies ergibt sich unter Berücksichtigung von 2.9. auch aus 1.5.)
2. Ist Δ_Γ ein S.G. so ist $[M, A]_{\Delta_\Gamma}$ artinsch (noethersch), falls A_R artinsch (noethersch) ist.

Für $R = T$ bzw. $\Delta = \Gamma$ ist die Voraussetzung von 1. bzw. 2. insbesondere erfüllt.

Spezialfälle, etwa $A = M$ oder $A = T$, sind unmittelbar abzulesen.

Beweis: 4.1. und 4.2.

Zahlreiche Beispiele für T-accessible Selbstgeneratoren M_R enthält § 3. Bedingungen für M_R , derart daß Δ_Γ ein S.G. ist - schwächer als " $\Delta = \Gamma$ " - erschließen sich nur mühsam (falls M_R projektiv ist, ist zwar $_\Gamma \Delta$, i.a. jedoch nicht Δ_Γ ein S.G.) Das folgende, sehr spezielle Lemma findet in Beispielen Anwendung.

Lemma 4.5.: Ist $M = P \oplus N$, wobei P_R endl. erzeugt und projektiv ist und $[N, R] = 0$, so ist Δ_Γ ein S.G. (Insbesondere ist jeder endl. erzeugte Generator von $\mathcal{M}_Z$ von der angegebenen Gestalt.)

Beweis:

$$r = \begin{pmatrix} [P, P] & 0 \\ [P, N] & [N, N] \end{pmatrix}$$

Wegen $M^* = P^*$ erhält man

$$\Delta = \left\{ \sum_{\text{endl.}} \begin{pmatrix} [p_i, f_i] & 0 \\ [n_i, g_i] & 0 \end{pmatrix} : p_i \in P, n_i \in N, f_i, g_i \in P^* \right\}$$

Da P_R endl. erzeugt und projektiv ist, gilt speziell

$$\begin{pmatrix} 1_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Delta$$

und damit für $\delta \in \Delta$: $\delta = \delta \begin{pmatrix} 1_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \delta \Delta$. Damit

ist $\Delta^2 = \Delta_r$ ein S.G. (vgl. 2.9.).

Erstes Hauptziel dieses Paragraphen sind Aussagen über das Verhalten des Funktors F hinsichtlich der Begriffe "einfach" und "Sockel", falls M_R ein S.G. ist. Wir stellen die Hauptresultate, sowie Beispiele und Ergänzungen an den Anfang und bringen anschließend die Beweise.

Interessant ist die Tatsache, daß die Aussagen des folgenden Satzes - teils einzeln, teils paarweise - für Selbstgeneratoren charakteristisch sind (4.9.). Auf endl. erzeugte und projektive Moduln treffen sie, selbst im Spezialfall $A \cong M$, i.a. nicht zu.

SATZ 4.6.:

Ist M_R ein S.G., so gilt für $A_R \in \mathcal{M}_R$, $X_R \subset AT_R$, und $B_\Gamma \subset [M, A]_\Gamma$:

1. a) X_R ist einfach $\Leftrightarrow [M, X]_{\Delta_\Gamma}$ ist einfach
 b) $\Sigma_{f \in B} Bi(f)_R$ ist einfach $\Leftrightarrow B_{\Delta_\Gamma}$ ist einfach
2. a) $X_R \hookrightarrow 'AT_R \Leftrightarrow [M, X]_{\Delta_\Gamma} \hookrightarrow '[M, A]_\Gamma \Leftrightarrow [M, X]_\Gamma \hookrightarrow '[M, A]_\Gamma$
 b) $\Sigma_{f \in B} Bi(f)_R \hookrightarrow 'AT_R \Leftrightarrow B_{\Delta_\Gamma} \hookrightarrow '[M, A]_\Gamma \Leftrightarrow B_\Gamma \hookrightarrow '[M, A]_\Gamma$
3. $So[M, A]_\Gamma = [M, So(A_R)]_{\Delta}$
4. a) $So(AT_R)$ ist groß in AT_R bzw. einfach bzw. 0 $\Leftrightarrow$
 $So[M, A]_\Gamma$ ist groß in $[M, A]_\Gamma$ bzw. einfach bzw. 0
 b) $So(AT_R)$ ist endl. erzeugt $\Leftrightarrow So[M, A]_\Gamma$ ist endl. erzeugt.
5. Ist X ein überdachter R -Untermodul von AT , so ist $[M, X]$ ein überdachter Γ -Untermodul von $[M, A]$.
6. Ist $[M, A]_\Gamma$ halbartinsch, so ist AT_R halbartinsch.
7. Γ ist halbeinfach $\Leftrightarrow M_R$ ist endl. erzeugt, projektiv, halbeinfach.

Spezialfälle 4.7.: Sei M_R ein S.G.

1. $So(\Gamma_\Gamma) = [M, So(M_R)]_{\Delta}$, $So(M_\Gamma^\#) = [M, So(R_R)]_{\Delta}$
2. $So(\Gamma_\Gamma)$ ist groß in Γ_Γ bzw. einfach bzw. Null bzw. endl. erzeugt $\Leftrightarrow So(M_R)$ ist groß in M_R bzw. einfach bzw. Null bzw. endl. erzeugt.

Ein entsprechender Zusammenhang besteht zwischen $\text{So}(T_R)$ und $\text{So}(M_R^\#) = \text{So}([M, T]_\Gamma)$.

Weitere Spezialfälle sind abzulesen.

Bemerkungen 4.8.:

1. Die Gleichung " $\text{So}[M, A]_\Gamma = [M, \text{So}(A_R)]$ " ist für einen S.G. M_R i.a. falsch, d.h. $[M, \text{So}(A_R)]$ ist i.a. nicht Δ -accessibel. Dies zeigt das Beispiel eines unendlichdimensionalen Vektorraums $M_R = M_K$: Δ ist das Ideal der Endomorphismen von endlichem Rang, und es gilt $\text{So}(\Gamma_\Gamma) = \Delta \subsetneq \Gamma = [M, \text{So}(M_R)]$ (4.6.). Die Sockelformel in 4.6. läßt sich also - sogar für projektive Generatoren - nicht verbessern. Für einen endl. erzeugten und projektiven S.G. M_R erhält man sowohl aus 4.6. als auch aus 1.10.: $\text{So}[M, A]_\Gamma = [M, \text{So}(A_R)]$.
2. Ist M_R projektiv, so gilt auch die Umkehrung von 4.6., 5. (vgl. Beweis von 4.6.). 4.6., 6. ist - auch für projektive Generatoren - i.a. nicht umkehrbar, wie wieder aus dem Standardbeispiel eines Vektorraums $M_R = M_K$ mit $\dim(M_K) = \infty$ hervorgeht: M_K ist trivialerweise halbartinisch; jedoch gilt $\text{So}(\Gamma/\Delta)_\Gamma = 0$.
3. Die Aussage von 4.6., 7. ist eine Verallgemeinerung von [22], Theorem 4.8.

Der folgende Satz zeigt, daß die Voraussetzung von 4.6. scharf ist.

SATZ 4.9.: Die Aussage

(1') M_R ist ein S.G.

ist damit gleichwertig, daß M_R für alle $A_R \in \mathcal{M}_R$ und $X_R \subset AT_R$ einer der Forderungen (2') bis (5') genügt (vgl. Satz 4.6.).

(2') X_R ist einfach $\Leftrightarrow [M, X]_{\Delta_T}$ ist einfach (1.a)

(3') $X_R \hookrightarrow AT_R \Leftrightarrow [M, X]_T \hookrightarrow [M, A]_T$ (2.a)

(4') $So[M, A]_T = [M, So(A_R)]_{\Delta}$ (3.)

und eine der drei folgenden Äquivalenzen ist gültig

$So(AT_R)$ ist groß in AT_R bzw. einfach bzw. 0 $\Leftrightarrow$
 $So[M, A]_T$ ist groß in $[M, A]_T$ bzw. einfach bzw. 0 (4.a)

(5') $So[M, A]_T = [M, So(A_R)]_{\Delta}$ (3.)

und $[M, X]$ ist ein überdachter Γ -Untermodul von $[M, A]$, falls X ein überdachter R -Untermodul von AT ist. (5.)

Der Beweis folgt im Anschluß an den Beweis von 4.6.. Die in 2.9. aufgeführten äquivalenten Beschreibungen eines Selbstgenerators finden darin vorteilhaft Anwendung.

Beispiel 4.10. für einen endl. erzeugten und projektiven Modul M_R , auf welchen die Aussagen 4.6. 1., 2., 3. für $A = M$ nicht zutreffen (vgl. 3.7.):

Seien K ein Körper, $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R$.

$So(M_R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \hookrightarrow M_R$, $[M, So(M_R)]_{\Delta} = 0$, $So(\Gamma) = \Gamma$.

Beispiele 4.11.:

1. Anwendung von 4.6. auf den Fall, daß $R = K$ ein Schiefkörper ist, ergibt für $A = M$ die bekannten Aussagen über den Endomorphismenring, für $A = K$ über den Dualraum eines Vektorraums M_K ; Δ stimmt offensichtlich mit dem Ideal der Endomorphismen von endlichem Rang überein. Einige Beispiele:

- a) Für $B_\Gamma \subset \Gamma_\Gamma$ gilt: BA_Γ einfach $\Leftrightarrow \dim_{f \in B} (\sum_{f \in B} Bi(f)) = 1$
 u. $B_\Gamma \subsetneq \Gamma_\Gamma \Leftrightarrow BA_\Gamma \subsetneq \Gamma_\Gamma \Leftrightarrow \sum_{f \in B} Bi(f) = M$ (4.6., 1., 2.)
- b) $So(\Gamma_\Gamma) = \Delta_\Gamma \subsetneq \Gamma_\Gamma$ (4.6., 3., 4.a)
- c) Δ_Γ ist endl. erzeugt $\Leftrightarrow \dim(M_K) < \infty$ (4.6., 4.b)
- d) Γ ist halbeinfach $\Leftrightarrow \dim(M_K) < \infty$ (4.6., 7.)

Diese Aussagen lassen sich vermöge 4.6. auf halbeinfache, projektive Moduln M_R ausdehnen, falls man "eindimensional" durch "einfach" und "endlichdimensional" durch "endlich erzeugt" ersetzt. Auch in diesem Fall ist

$$\Delta = \{f \in \Gamma: Bi(f)_R \text{ endl. erzeugt}\}.$$

2. Ist M_R ein projektiver Modul über einem kommutativen oder v. Neumann regulären Ring R (oder torsionslos über einem regulären, rechtsinjektiven Ring), so sind die Aussagen von 4.6. gültig. (vgl. § 3)
3. Jeder Generator M_R erfüllt die Vor. von 4.6.. Sei speziell $R = \mathbb{Z}$ und $M_{\mathbb{Z}}$ ein Generator von $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}$.
- a) $So([M, A]_\Gamma) = 0 \Leftrightarrow A_{\mathbb{Z}}$ ist torsionsfrei
 Insbesondere gilt: $So(M_\Gamma^*) = 0$.
- b) Ist $M = \mathbb{Z}^m \oplus N$, mit $m \in \mathbb{N}$ und $[N, \mathbb{Z}] = 0$ (jeder endlich erzeugte Generator hat diese Gestalt), so gilt:
 $f \in \Gamma$ ist genau dann ein Element von $So(\Gamma_\Gamma)$, wenn es Elemente $n_1, \dots, n_m \in So(N_{\mathbb{Z}})$ gibt, so daß für $((x_i), y) \in \mathbb{Z}^m \oplus N$ gilt: $f((x_i), y) = \sum n_i x_i$.

Spezialfälle: i) $M = \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$

$$\text{So}(r_\Gamma) = \{f: M \ni ((x_i), y) \mapsto (0, \sum n_i x_i) \in M \text{ mit } n_i \in \mathbb{Z}/(p)\}$$

$$\text{ii) } M = \mathbb{Z}^m \oplus \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/(p)$$

$$\text{So}(r_\Gamma) = \{f: M \ni ((x_i), y) \mapsto (0, \sum n_i x_i) \in M \text{ mit } n_i \in \bigoplus_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/(p)\}$$

Beweis: Teil a) ist mit 4.6. klar

$$\text{b) } r = \begin{pmatrix} [\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^m] & 0 \\ [\mathbb{Z}^m, N] & [N, N] \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} [\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^m] & 0 \\ [\mathbb{Z}^m, N] & 0 \end{pmatrix}$$

Aus 4.6., 3. erhält man

$$\text{So}(r_\Gamma) = [M, \text{So}(M_{\mathbb{Z}})] \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\mathbb{Z}^m, \text{So}(N)] & 0 \end{pmatrix}$$

Das ist aber die Behauptung.

Beweis von 4.6.: M_R sei ein S.G.

1. a) Sei X_R einfach. Nach Vor. und 4.1. gilt $X = XT$. Aus $\mathcal{U}_T(X) = \{0, XT\}$ folgt mit 4.1. $\mathcal{U}_\Delta(\psi(X)) = \mathcal{U}_\Delta([M, X]_\Delta) = \{0, [M, X]_\Delta\}$. Der Ansatz $0 \neq B_\Gamma \subset [M, X]_\Delta$ führt zu $0 \neq B\Delta \subset [M, X]_\Delta$ (2.7.) und damit zu $B = B\Delta = [M, X]_\Delta$; also ist $[M, X]_\Delta$ einfach.

Sei $[M, X]_\Delta$ einfach, d.h. $\mathcal{U}_\Delta([M, X]_\Delta) = \{0, [M, X]_\Delta\}$.

Aus 4.1. erhält man $\mathcal{U}_R(X) = \mathcal{U}_T(X) = \{XT = X, 0\}$,

d.h. X_R ist einfach.

b) Man verfähre entsprechend mit der Umkehrabb. φ von ψ .

2. a) Sei $X_R \subset {}^1AT_R$. Aus 2.9. entnimmt man $[M, X]_R \subset [M, A]_R$, was gemäß 2.7. $[M, X]_{\Delta} \subset [M, A]_{\Delta}$ zur Folge hat. Sei umgekehrt $[M, X]_R \subset [M, A]_{\Delta}$ und $0 \neq X'_R \subset AT_R$. Nach 2.7. und 4.1. bedeutet dies $\psi(X) = [M, X]_{\Delta} \subset [M, A]_{\Delta}$ und $0 \neq \psi(X') \subset [M, A]_{\Delta}$, also $0 \neq \psi(X) \cap \psi(X')$. Erneute Anwendung von 2.7. ergibt $0 \neq (\psi(X) \cap \psi(X'))_{\Delta} = \psi(X \cap X')$, was mit $0 \neq X \cap X'$ gleichwertig ist. Das heißt $X_R \subset {}^1AT_R$.

b) Entsprechende Überlegungen lassen sich für φ anstelle von ψ durchführen.

3. Sei B_R ein einfacher Untermodul von $[M, A]_R$. 2.7. besagt $BA_R \subset {}^1B_R$, also $BA = B$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{So}([M, A]_R) &= \Sigma B &= \Sigma BA &= \Sigma \psi(x) &= \\ B \subset [M, A] & B \subset [M, A] & X \subset AT & & \\ B_R \text{ einfach} & B_R \text{ einfach} & X_R \text{ einfach} & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \psi(\Sigma X) &= \psi(\text{So}(AT_R)) &= \psi(\text{So}(A_R) \cdot T) &= [M, \text{So}(A_R)]_{\Delta} \\ X &\subset AT & & & \\ X_R &\text{ einfach} & & & \end{aligned}$$

4. a) Wegen $\text{So}[M, A]_R = \psi(\text{So}(AT_R))$ erhält man mit 1., 2. und 4.1. die Behauptung.

b) Sei $\text{So}(AT_R) = \bigoplus_{i \in I} X_i$, $(X_i)_R$ einfach.

$$\text{Von der Gleichung } \psi(\bigoplus_{i \in I} X_i) = \bigoplus_{i \in I} \psi(X_i) = \text{So}[M, A]_R \text{ (4.1.),}$$

wobei $\psi(X_i)_R$ für $i \in I$ einfach ist (vgl. Beweis von 3.), liest man die Behauptung unmittelbar ab.

5. Ist $\text{So}(\text{AT}/X)_R = \text{So}(A/X \cdot T)_R$ einfach und groß, so ist gemäß

4. a) $\text{So}[M, A/X]_\Gamma$ einfach und groß. Aus $[M, X] \subsetneq [M, A]$ folgt $0 \neq [M, A]/[M, X] \subset [M, A/X]$, d.h. $\text{So}([M, A]/[M, X])_\Gamma$ ist einfach und groß.

Ist M_R A-projektiv, so läßt sich wegen $[M, A]/[M, X] \cong [M, A/X]$ dieses Argument umkehren.

6. Sei $[M, A]_\Gamma$ halbartinisch und $X_R \subsetneq \text{AT}_R$. $[M, X] \subsetneq [M, A]$ bedeutet nach Vor. $\text{So}([M, A]/[M, X])_\Gamma \neq 0$ bzw. $\text{So}[M, A/X]_\Gamma \neq 0$, was $\text{So}(\text{AT}/X)_R = \text{So}(A/X^T)_R \neq 0$ zur Folge hat (4.a).

Beweis von 4.9.:

(2') $\Rightarrow$ (1'): Wir prüfen Bedingung (5) aus Satz 2.9. nach:
Sei X_R einfach, $X_R \subsetneq A_R$ und $[M, A] \neq 0$. Es folgt $\text{AT}_R \neq 0$ und $X \subset \text{AT}$. Auf diese Situation läßt sich 1. a) anwenden:
 $[M, X]_{\Delta_\Gamma}$ ist einfach, insbesondere $[M, X] \neq 0$.

(3') $\Rightarrow$ (1'): Satz 2.9.

(4') $\Rightarrow$ (1'): Sei wieder X_R einfach, $X_R \subsetneq A_R$ und $[M, A] \neq 0$, d.h. $X \subset \text{AT}$. Von $\text{So}(A_R) = X$ kann man mit 2. und irgendeiner der Bedingungen von 4. a) auf $0 \neq \text{So}[M, A]_\Gamma = [M, X]_{\Delta}$ und damit auf $[M, X] \neq 0$ schließen.

(5') $\Rightarrow$ (1'): Sei M' ein überdachter R-Untermodul von $M = MT$. Nach Vor. ist $[M, M']$ ein überdachter Γ -Untermodul von $[M, M] = \Gamma$, d.h. $\text{So}(\Gamma/[M, M])_\Gamma$ ist einfach und groß. Wegen $\Gamma/[M, M] \subset [M, M/M']$ erhält man mit 3.: $0 \neq \text{So}[M, M/M']_\Gamma = [M, \text{So}(M/M')]_{\Delta}$, insbesondere $[M, \text{So}(M/M')]_{\Delta} \neq 0$. Gemäß 2.9. ist damit M_R ein S.G.

Die Umkehrungen sind in 4.6. enthalten.

Ist M_R ein Selbstgenerator, so ist $Ra(AT_R) = 0$ mit $Ra([M, A]_{\Delta_T}) = 0$ gleichwertig. Dies ist für einen endlich erzeugten und projektiven Modul M_R i.a. nicht richtig; auch für einen Generator fällt übrigens $Ra(AT) = 0$ nicht notwendig mit $Ra([M, A]_{\Delta}) = 0$ zusammen (Beispiele).

Außer der oben genannten sind alle der folgenden Aussagen über das Radikal $Ra([M, A]_R)$ bereits für T-accessible Moduln M_R richtig (MT = M wurde für § 4 generell vorausgesetzt); für Generatoren erhält man, wie Beispiele zeigen, keine wesentlichen Verschärfungen. Allerdings ist die Radikalbeziehung " $(Ra([M, A]_{\Delta})_{\Delta} = [M, Ra(AT)]_{\Delta}$ ", verglichen mit der Sockelformel für Selbstgeneratoren relativ unbefriedigend. Die 4.6., 3. entsprechende Abhängigkeit " $Ra([M, A]_{\Delta}) = [M, Ra(AT)]_{\Delta}$ " ist für Generatoren M_R widerlegbar. Dies ist darauf zurückzuführen, daß i.a. weder $Ra([M, A]_{\Delta})$ Δ -accessibel ist, noch $Ra([M, A]_{\Delta})$ mit $(Ra([M, A]_{\Delta}))_{\Delta}$ übereinstimmt, während für $M = MT$ stets $So([M, A]_{\Delta}) = So([M, A]_{\Delta})_{\Delta} = (So([M, A]_{\Delta}))_{\Delta}$ richtig ist (vgl. Beweis von 4.6., 3.).

Der Schwerpunkt der folgenden Überlegungen liegt in Gegen- und Anwendungsbeispielen, sowie in begleitenden Aussagen über $Ra([M, A]_{\Delta})$ und $(Ra([M, A]_{\Delta}))_{\Delta}$. U.a. wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit $(Ra([M, A]_{\Delta}))_{\Delta} = [M, Ra(AT)]_{\Delta}$ angegeben; dies ist insbesondere erfüllt, falls M_R selbstprojektiv ist (vgl. [7]).

Die in [7] für selbstprojektive Moduln erzielten Ergebnisse lassen sich, wie man bemerkt, nicht auf Generatoren ausdehnen.

Im Falle $\Delta = R$ (d.h. M_R ist endl. erzeugt und projektiv) fällt die erwähnte Radikalformel mit Spezialfällen von [6] und [7] zusammen.

SATZ 4.11.: Für $A_R \in \mathcal{M}_R$, $X_R \subset A_R$ und $B_r \subset [M, A]_r$ gilt:

1. a) XT_R ist klein in $AT_R \iff [M, X]_{\Delta_r}$ ist klein in $[M, A]_{\Delta_r}$
 b) $\sum_{f \in B} Bi(f)_R$ ist klein in $AT_R \iff BA_r$ ist klein in $[M, A]_{\Delta_r}$
2. a) $Ra([M, A]_{\Delta_r}) \subset [M, Ra(AT_R)]$
 b) $(Ra([M, A]_{\Delta_r}))_{\Delta} = [M, Ra(AT_R)]_{\Delta}$
 c) Äquivalent sind: (i) $(Ra[M, A]_r)_{\Delta} = [M, Ra(AT_R)]_{\Delta}$
 (ii) $Ra[M, A]_r \subset [M, Ra(AT_R)]$
3. Folgende Aussagen sind gleichwertig:
 (i) $Ra(AT_R) \subsetneq AT$ (bzw. $Ra(AT_R)$ ist klein in AT_R)
 (ii) $Ra([M, A]_{\Delta_r}) \subsetneq [M, A]_{\Delta}$ (bzw. $Ra([M, A]_{\Delta_r})$ ist klein in $[M, A]_{\Delta_r}$)

4. Ist M_R ein S.G., so gilt:

$$Ra(AT_R) = 0 \iff Ra([M, A]_{\Delta_r}) = 0$$

Bemerkungen 4.12.:

1. Ist M_R selbstprojektiv, so folgt $(Ra[M, A]_r)_{\Delta} = [M, Ra(AT_R)]_{\Delta}$
Beweis: In [7] wird gezeigt: Ist M_R selbstprojektiv und A_R endlich M-erzeugt (d.h. $A = T_M(A) \cong M^n/U$), so gilt (ohne die Voraussetzung " $MT = M$ "):

$$Ra[M, A]_r = \{f \in [M, A] : Bi(f)_R \text{ ist klein in } A_R\}.$$

Für die Inklusion " $\subset$ " wird lediglich die Selbstprojektivität von M_R benötigt; für den hier interessierenden Fall $MT = M$ erhält man:

$$Ra[M, A]_r \subset [M, Ra(AT_R)]$$

4.11., 2 c) liefert die Behauptung.

2. Ist Δ_r ein S.G., so ist $Ra([M, A]_{\Delta_r}) = [M, Ra(AT_R)]_{\Delta}$.

Beweis: Man wendet 4.11., 2 b) an und berücksichtigt, daß jeder r-Untermodul von $[M, A]_{\Delta}$ Δ -accessibel ist.

3. Für einen Generator M_R , d.h. $T = R$, besagt 4.11.:
 X_R ist klein in $A_R \iff [M, X]_{\Delta_R}$ ist klein in $[M, A]_{\Delta_R}$
 $Ra(A_R) = 0 \iff Ra([M, A]_{\Delta_R}) = 0$
 usw.

Beispiel 4.13.: Wähle R und M wie in 4.10. M_R ist insbesondere endlich erzeugt und projektiv.
 Offensichtlich ist $Ra(M_R) = Ra(MT_R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \neq 0$,
 während $Ra(\Delta_R) = Ra(K_K) = 0$ gilt. Die Aussage 4.11., 4. trifft also für $A = M$ nicht zu.

Beweis von 4.11.:

1. a) Sei XT_R klein in AT_R und $[M, X]_{\Delta} + B = [M, A]_{\Delta}$. Es folgt $[M, A]_{\Delta} = [M, X]_{\Delta} + BA$, $[M, X]_{\Delta} = \psi(XT)$ und $BA = \psi(X')$ mit $X' \in \mathcal{U}_T(A)$ (4.1.). Aus $\psi(AT) = \psi(XT) + \psi(X') = \psi(XT+X')$ schließt man mit 4.1. weiter: $AT = XT+X'$. Nach Vor. bedeutet dies $X' = AT$, d.h. $B = BA = [M, A]_{\Delta}$.
 Die Umkehrung erhält man ganz entsprechend.

- b) Man verwende die Umkehrabbildung ϕ von ψ und beachte, daß wegen $\Delta M = M$ gilt: $\sum_{f \in B} Bi(f) = \sum_{f \in BA} Bi(f)$.

2. a) Wir zeigen zunächst: Ist X_R maximal in AT_R , so ist $([M, X] \cap [M, A]_{\Delta})_R$ maximal in $[M, A]_{\Delta_R}$.
 Ist $AT/X = A/X \cdot T_R$ einfach, so ist $[M, A/X]_{\Delta_R}$ einfach (vgl. Beweis von 4.6., 1.a); da A/X T-accessibel ist, wird die Vor. "S.G." hier nicht benötigt). Aus $0 \neq [M, A]/[M, X] \subset [M, A/X]$ folgt mit 2.7.:
 $0 \neq ([M, A]/[M, X])_{\Delta} = [M, A]_{\Delta}/([M, X] \cap [M, A]_{\Delta})$ ist ein einfacher Γ -Modul.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$Ra([M, A]_{\Delta}) \subset \bigcap_{\substack{X \subset AT \\ \text{max.}}} ([M, X] \cap [M, A]_{\Delta}) \subset \bigcap_{\substack{X \subset AT \\ \text{max.}}} [M, X] = [M, Ra(AT_R)]$$

b) Anwendung von 1. a) ergibt:

$$\begin{aligned} (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta &= \begin{matrix} \Sigma B\Delta \\ B \subset \overline{[M, A]} \\ \text{klein} \end{matrix} = \begin{matrix} \Sigma \psi(X) \\ X=XT \subset AT \\ \text{klein} \end{matrix} = \begin{matrix} \psi(\Sigma X) \\ X=XT \subset AT \\ \text{klein} \end{matrix} \\ &= \psi(\text{Ra}(AT_R) \cdot T) = \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta. \end{aligned}$$

c) (ii) $\Rightarrow$ (i): Unter Berücksichtigung von 2. b) erhält

$$\text{man } (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta \subset \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta = (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta$$

$$\text{und damit } (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta = \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $f \in \text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F})$. Die Vor. und 2.b) liefern:
 $f\Delta \subset \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta = \text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F})\Delta$, d. h. insbesondere
 $f\Delta \subset \text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F})$. Daß $f\delta$ für $\delta \in \Delta$ in $\overline{[M, A]}_{\Delta_F}$ klein ist,
 bedeutet gemäß 1. b), daß $\text{Bi}(f\delta)_R$ in AT_R klein ist. Damit
 hat man $f(M) = f(\Delta M) = (f\Delta)M \subset \text{Ra}(AT_R)$.

3. Aus $\text{Ra}(\overline{[M, A]}\Delta) = \overline{[M, A]}\Delta$ folgt $\overline{[M, A]}\Delta = (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta$

$$= \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta = \psi(\text{Ra}(AT_R) \cdot T) \text{ und weiter}$$

$$\text{Ra}(AT_R) \cdot T = AT \text{ (vgl. 4.1.) bzw. } \text{Ra}(AT_R) = AT.$$

Die Umkehrung ist mit 2. b) klar.

Sei $\text{Ra}(AT_R)$ klein in AT_R . Daß $\text{Ra}(AT_R) \cdot T$ in AT_R klein ist, bedeutet gemäß 1. a) und 2. b):

$$(\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta = \overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta_F \text{ ist klein in } \overline{[M, A]}\Delta_F.$$

Der Ansatz $\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}) + B = \overline{[M, A]}\Delta$ führt zu

$$(\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta + B\Delta = \overline{[M, A]}\Delta \text{ und damit zu } B = B\Delta = \overline{[M, A]}\Delta.$$

Sei umgekehrt $\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F})$ klein in $\overline{[M, A]}\Delta_F$.

Es folgt, daß $\overline{[M, \text{Ra}(AT_R)]}\Delta = (\text{Ra}(\overline{[M, A]}_{\Delta_F}))\Delta$ in

$\overline{[M, A]}\Delta_F$ klein ist. Aus 1.a) entnimmt man: $\text{Ra}(AT_R) \cdot T$ ist

klein in AT_R . Die Aussage $\text{Ra}(AT_R) + X = AT$ ist mit

$\text{Ra}(AT_R) \cdot T + XT = AT$ gleichbedeutend. Den vorausgehenden Überlegungen zufolge zieht sie $X = XT = AT$ nach sich.

In den folgenden Beispielen ist stets $R = \mathbb{Z}$, M ein Generator der Gestalt $\mathbb{Z} \oplus N$, $[\mathbb{N}, \mathbb{Z}] = 0$ und $A = M$. Aus 4.5. und 4.12., 2. ergibt sich für diese Situation $Ra(\Delta_\Gamma) = [\overline{M}, Ra(M_\Gamma)] \Delta$.

Beispiel 4.14.: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$.

Es gilt: $Ra(\Gamma) \subsetneq [\overline{M}, Ra(M)]$, insbesondere ist

$Ra(\Gamma) = \{f \in \Gamma: Bi(f)_{\mathbb{Z}} \subset M_{\mathbb{Z}} \text{ klein}\}$ ($\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ ist nicht selbstprojektiv).

$Ra(\Gamma)$ ist Δ -accessibel, $[\overline{M}, Ra(M)]$ ist nicht Δ -accessibel.

Mit 4.11., 2 c) schließt man:

$$Ra(\Gamma) = (Ra(\Gamma))\Delta = [\overline{M}, Ra(M)]\Delta = Ra(\Delta_\Gamma).$$

Beispiel 4.15.: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Es gilt: $Ra(\Gamma) \subsetneq [\overline{M}, Ra(M)]$; $Ra(\Gamma)$ enthält Endomorphismen, deren Bild in $M_{\mathbb{Z}}$ nicht klein ist.

Weder $Ra(\Gamma)$ noch $[\overline{M}, Ra(M)]$ ist Δ -accessibel.

Mit 4.11., 2 c) schließt man:

$$Ra(\Gamma) \supsetneq (Ra(\Gamma))\Delta = [\overline{M}, Ra(M)]\Delta = Ra(\Delta_\Gamma).$$

Beispiel 4.16.: $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(p)$.

Es gilt: $Ra(\Gamma) \not\subset [\overline{M}, Ra(M)] = 0$. Beide Seiten sind Δ -accessibel.

Mit 4.11., 2. c) schließt man:

$$Ra(\Gamma) = (Ra(\Gamma))\Delta \neq [\overline{M}, Ra(M)]\Delta = Ra(\Delta_\Gamma) = 0.$$

Beweise: Für $M = \mathbb{Z} \oplus N$, $[\mathbb{N}, \mathbb{Z}] = 0$ ist

$$\Gamma = \begin{pmatrix} [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}] & 0 \\ [\mathbb{Z}, N] & [\mathbb{N}, N] \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ N & [\mathbb{N}, N] \end{pmatrix} \text{ als Ring.}$$

$$(1) \text{ Man bemerkt } \Delta = \begin{pmatrix} [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}] & 0 \\ [\mathbb{Z}, N] & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) Ra(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & Ra([\mathbb{N}, N]) \end{pmatrix}$$

Beweis: $\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ n & g \end{pmatrix} \in \text{Ra}(\Gamma) \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & 0 \\ n & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & 0 \\ n' & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - zz' & 0 \\ -(nz' + gn') & 1 - gg' \end{pmatrix}$$

ist invertierbar für alle $z' \in \mathbb{Z}$, $n' \in \mathbb{N}$, $g' \in [\mathbb{N}, \mathbb{N}]$.

Letzteres ist damit gleichwertig, daß $1 - zz'$ und $1 - gg'$ für alle $z' \in \mathbb{Z}$, $g' \in [\mathbb{N}, \mathbb{N}]$ invertierbar sind, was genau dann der Fall ist, wenn $z = 0$ und $g \in \text{Ra}([\mathbb{N}, \mathbb{N}])$ gilt.

Zu 4.14.: $\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ als Ring

$$(1) [\mathbb{M}, \text{Ra}(\mathbb{M})] = [\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}, \mathbb{Q}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{Ra}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Aus $[\mathbb{M}, \text{Ra}(\mathbb{M})] \Delta = \text{Ra}(\Delta_\Gamma) \subset \text{Ra}(\Gamma)$ (4.11. 2b) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1) und (2), daß $[\mathbb{M}, \text{Ra}(\mathbb{M})]$ nicht Δ -accessibel ist.

$$(4) \Delta = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Offensichtlich ist } \text{Ra}(\Gamma) \Delta\text{-accessibel.}$$

Zu 4.15.: $\Gamma = \begin{pmatrix} [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}] & 0 \\ [\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(p^\infty)] & [\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}(p^\infty) & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$

als Ring, wobei $\mathbb{Z}_p$ den Ring der ganzen p -ad. Zahlen bezeichnet. $\mathbb{Z}_p$ ist ein lokaler Ring, $\text{Ra}(\mathbb{Z}_p) = p\mathbb{Z}_p$.

$$(1) [\mathbb{M}, \text{Ra}(\mathbb{M})] = [\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}(p^\infty) & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{Ra}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{Z}(p^\infty) & p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$$

Da jeder von Null verschiedene Endomorphismus $f \in [Z(p^\infty), Z(p^\infty)] = Z_p$ ein Epimorphismus ist, gibt es $f \in \text{Ra}(\Gamma)$, etwa $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \cdot 1_{Z_p} \end{pmatrix}$,

mit $\text{Bi}(f) = Z(p^\infty)$.

(3) $\Delta = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Z(p^\infty) & 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist weder $[M, \text{Ra}(M)]$ noch $\text{Ra}(\Gamma)$ Δ -accessibel.

Zu 4.16.: $\Gamma = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ Z/(p) & Z/(p) \end{pmatrix}$ als Ring

$$(1) [M, \text{Ra}(M)] = 0$$

$$(2) \text{Ra}(\Gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z/(p) & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\text{Ra}(\Delta_\Gamma) = 0$, da $\text{Ra}(M) = \text{Ra}(MT) = 0$ (4.11., 4.); jedoch ist $\text{Ra}(\Gamma) \neq 0$.

§ 5 Perfekte Injektoren (vgl. [1], [11])

F.W. Anderson bewies in [1] die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen endl. erzeugten und projektiven Modul M_R :

- (1) $M_R^{\otimes} - : {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält injektive Hüllen
(M_R ist ein "perfekter Injektor")
- (2) $M_R^{\otimes} - : {}_R\mathcal{M} \rightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält wesentliche Erweiterungen
- (3) $(R/T)_R$ ist flach

Gemäß Satz 2.9. sind (1) - (3) äquivalent zu:

- (4) ${}_R T$ ist ein S.G.

Die Äquivalenz von (2), (3), (4) läßt sich unter Verzicht auf endliche Erzeugbarkeit von M_R aufrechterhalten (5.6.), nicht jedoch die Gleichwertigkeit von (1) und (2) (5.8.). Der hier angegebene Beweis liefert im Spezialfall $\Delta = r$ die Äquivalenz der Aussagen (1) - (4) (5.7.) und vermittelt einen sehr guten Überblick über den Sachverhalt. Er basiert auf der Beobachtung, daß für einen projektiven Modul M_R stets ${}_r\Delta$ ein S.G. ist, und auf dem folgenden Satz, welcher seinerseits auf den Ergebnissen von § 2 aufbaut.

Mit ${}_R\mathcal{M}$ bzw. ${}_r\mathcal{M}$ wird die volle Unterkategorie der von ${}_R T$ bzw. ${}_r\Delta$ erzeugten Objekte von ${}_R\mathcal{M}$ bzw. ${}_r\mathcal{M}$ bezeichnet.

SATZ 5.1.: Folgende Aussagen sind äquivalent

- (1) ${}_R\mathcal{M}$ bzw. ${}_R\mathcal{M}$ ist gegen R - bzw. Γ -Untermoduln abgeschlossen, und $M \otimes_R -$ induziert eine Äquivalenz ${}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ mit Inversem $M^* \otimes -$.
Ferner sind T und Δ idempotent, und M ist ein Objekt von ${}_R\mathcal{M}$.
- (2) $MT = M$, ${}_R T$ ist ein S.G. in ${}_R\mathcal{M}$, ${}_R \Delta$ ist ein S.G. in ${}_R\mathcal{M}$.
- (3) $MT = M$, $(R/T)_R$ ist flach, $(\Gamma/\Delta)_\Gamma$ ist flach.

Ist M_R projektiv, so sind (1) - (3) genau dann erfüllt, wenn $(R/T)_R$ flach ist.

Für den Beweis werden die beiden folgenden Hilfsmittel benötigt.

Lemma 5.2.: Es gelte $MT = M$.

1. Ist ${}_R T$ ein S.G., so folgt $T \approx M^* \otimes_\Gamma M$ als R -Bimoduln.
2. Ist ${}_R \Delta$ ein S.G., so folgt $\Delta \approx M \otimes_R M^*$ als Γ -Bimoduln.

Bemerkung: In [20] wird $\Delta \approx M \otimes M^*$ für einen projektiven Modul M_R gezeigt. Die Voraussetzung " $MT = M$ und ${}_R \Delta$ ist ein S.G." wird sowohl von projektiven als auch von (Zelmanowitz) regulären Moduln erfüllt; letztere sind nicht notwendig projektiv (vgl. § 3).

Beweis von 5.2.:

1. Wir zeigen, daß $(,): M^* \otimes_\Gamma M \longrightarrow T$ ein Isomorphismus ist.

Man bemerkt $TM^* = M^* \Delta$ und wegen $\Delta M = M$ weiter $TM^* \otimes_\Gamma M = M^* \otimes_\Gamma M$. Die Vor. besagt 2.9. zufolge, daß alle R -(Links)-Untermoduln von ${}_R(M^* \otimes M)$ wieder T -accessibel sind. Es ist also nur $T \cdot \text{Ke}(,) = 0$ nachzuweisen. Ist $0 = \Sigma(f_i, m_i) \in T$ und $(g, n) \in T$, so gilt:

$$\begin{aligned} (g, n) \Sigma f_i \otimes m_i &= \Sigma(g[n, f_i]) \otimes m_i = \Sigma g \otimes ([n, f_i] m_i) = \\ &= g \otimes n \Sigma(f_i, m_i) = 0. \end{aligned}$$

2. Der Beweis ist völlig symmetrisch zu 1..

Bemerkung 5.3.:

Für ein idempotentes zweiseitiges Ideal I von R sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) ${}_R I$ ist ein S.G.
- (2) $(^R/_I)_R$ ist flach.
- (3) I_R ist flach, und die Einbettung $I_R \hookrightarrow R_R$ ist rein.

Beweis von 5.3.:

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) ist nach 2.9. richtig, (2) $\Leftrightarrow$ (3) gemäß [3] (S. 31. Prop. und S. 33, Cor.).

Beweis von 5.1.:

Der Zusatz für einen projektiven Modul M_R folgt aus der Tatsache, daß in diesem Falle stets $MT = M$ gilt und $(^I/_\Delta)_I$ flach ist (3.1. und 2.9.).

- (1) $\Rightarrow$ (2): Daß ${}_R T$ bzw. ${}_I \Delta$ ein S.G. ist, entnimmt man wieder aus 2.9.. $M \in {}_I \mathcal{M}$ und $\Delta^2 = \Delta$ bedeutet $M = \Delta M = MT$.

- (2) $\Rightarrow$ (3): Satz 2.9.

- (3) $\Rightarrow$ (1): $MT = M$ impliziert die Idempotenz von T und Δ , sowie $\Delta M = M \in {}_I \mathcal{M}$ (2.7.). Unter Berücksichtigung von 2.9. ist nur noch zu zeigen, daß

${}_R \mathcal{M} \xrightarrow{M \otimes_R -} {}_I \mathcal{M}$ und ${}_I \mathcal{M} \xrightarrow{M^* \otimes_I -} {}_R \mathcal{M}$ inverse Äquivalenzen sind. Für $A \in {}_R \mathcal{M}$ folgert man aus 5.2. und 5.3.:

$$A = TA \approx T \otimes_R A \approx M^* \otimes_I M \otimes_R A$$

Für $B \in {}_I \mathcal{M}$ entsprechend:

$$B = \Delta B \approx \Delta \otimes_I B \approx M \otimes_R M^* \otimes_I B$$

Folgerungen 5.4.:

Ist eine der äquivalenten Bedingungen von 5.1. erfüllt - dies trifft z. B. zu, falls M_R projektiv ist und $(R/T)_R$ flach -, so gilt für $A \in {}_R\mathcal{M}$ bzw. für $f: {}_R A \longrightarrow {}_R B$:

1. Äquivalent sind: (i) $M \otimes f: M \otimes A \longrightarrow M \otimes B$ ist ein (wesentlicher) Monomorphismus in ${}_R\mathcal{M}$
(ii) $f|_{TA}: TA \longrightarrow TB$ ist ein (wesentlicher) Monomorphismus in ${}_R\mathcal{M}$
2. Äquivalent sind: (i) ${}_R A$ ist injektiv für ${}_R T$
(ii) ${}_R TA$ ist injektiv für ${}_R T$
(iii) ${}_R(M \otimes A)$ ist injektiv für ${}_R A$
3. Äquivalent sind: (i) ${}_R TA$ ist selbstinjektiv
(ii) ${}_R(M \otimes A)$ ist selbstinjektiv
4. Äquivalent sind: (i) $f|_{TA}: TA \longrightarrow TB$ ist eine projektive Hülle in ${}_R\mathcal{M}$
(ii) $M \otimes f: M \otimes A \longrightarrow M \otimes B$ ist eine projektive Hülle in ${}_R\mathcal{M}$
5. Äquivalent sind: (i) ${}_R TA$ ist artinsch (bzw. noethersch bzw. endl. erzeugt)
(ii) ${}_R(M \otimes A)$ ist artinsch (bzw. noethersch bzw. endl. erzeugt)
6. $So_{{}_R}(M \otimes A) = M \otimes So_{{}_R}(A)$
 $Ra_{{}_R}(M \otimes A) = M \otimes Ra_{{}_R}(TA)$ (vgl. [11])

Beweis:

${}_R\mathcal{M}$ bzw. ${}_R\mathcal{M}$ ist nach Vor. gegen Untermoduln, Quotienten und direkte Summen in ${}_R\mathcal{M}$ bzw. ${}_R\mathcal{M}$ abgeschlossen. Wegen $M \otimes TA = M \otimes A \in {}_R\mathcal{M}$ sind mit 5.1. die Aussagen 1., 2., 3., 5. klar.

4. zeigt man wie 2.13.

6.: Man bemerkt $\text{So}_R(\text{TA}) = \text{TSo}_R(A)$ und damit

$$\text{So}_R(M \otimes A) = M \otimes \text{So}_R(\text{TA}) = M \otimes \text{So}_R(A).$$

Entsprechend gilt die Radikalbeziehung.

Spezialfälle 5.5.: Voraussetzung wie in 5.4. Wegen

${}_R(M \overset{\circ}{\otimes} {}_R M) = {}_R T$ und ${}_R(M \otimes {}_R M^*) = {}_R \Delta$ gelten sämtliche Äquivalenzen aus 5.4. für die Paare ${}_R T$, ${}_R M$ und ${}_R T M^*$, ${}_R \Delta$. Es seien nur wenige Beispiele angeführt.

Äquivalent sind: (i) ${}_R T$ ist artinsch (bzw. noethersch bzw. endl. erzeugt)
(ii) ${}_R M$ ist artinsch (bzw. noethersch bzw. endl. erzeugt)

Äquivalent sind: (i) ${}_R A \rightarrow {}_R T$ ist eine projektive Hülle von ${}_R T$
(ii) ${}_R M \otimes A \rightarrow {}_R M$ ist eine projektive Hülle von ${}_R M$.

Folgerung 5.6.:

Ist M_R projektiv, so sind äquivalent

- (1) $M \otimes_R - : {}_R \mathcal{M} \rightarrow {}_R \mathcal{M}$ erhält wesentliche Erweiterungen
- (2) $(R/T)_R$ ist flach
- (3) ${}_R T$ ist ein S.G.

Beweis:

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Satz 2.9.

(3) $\Rightarrow$ (1): Folgerung 5.4.

(1) $\Rightarrow$ (3): Der Beweis von Anderson ([1]) läßt sich für einen projektiven Modul M_R unverändert übernehmen.

Folgerung 5.7.: Aus 5.1. entnimmt man die Gleichwertigkeit der folgenden Aussagen:

- (1) ${}_R\mathcal{M}$ ist gegen R -Untermoduln abgeschlossen, $M_R^{\otimes} -$ induziert eine Äquivalenz ${}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ (mit Inversem $M_F^* \otimes -$), und beide Spurideale sind idempotent.
- (2) M_R ist endl. erzeugt und projektiv, und $(R/T)_R$ ist flach.

Bemerkungen 5.8.:

1. Die eingangs angegebene Charakterisierung perfekter Injektoren ([1]) ist unmittelbar aus 5.6. und 5.7. zu ersehen.
2. Für einen projektiven Modul M_R sind die Aussagen:
 - (1) $M_R^{\otimes} -: {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält injektive Hüllen
 - (3) $(R/T)_R$ ist flach
 i.a. nicht äquivalent: Sei $R = K$ ein Schiefkörper und $\dim(M_K) = \infty$. Sandomierski zeigt in [16], daß ${}_R M \approx {}_R(M \otimes_K K)$ nicht injektiv ist.

Bemerkungen 5.9.: Auch perfekte Projektoren (d.h. M_R ist endl. erzeugt und projektiv, und $M_R^{\otimes} -: {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält projektive Hüllen, [1]), lassen sich in Anlehnung an die Resultate in [1] und [11] durch die Eigenschaft "Selbstgenerator" charakterisieren. Für einen endl. erzeugten, projektiven Modul M_R gilt:

1. Ist R ein semiperfekter Ring, so sind äquivalent:
 - (i) M_R ist ein perfekter Projektor
 - (ii) M_R ist ein S.G.
2. Ist M_R ein S.G., so erhält $M_R^{\otimes} -: {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ flache Moduln, und folgende Aussagen sind äquivalent:
 - (i) $M_R^{\otimes} -: {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ erhält Injektivität (bzw. Projektivität)
 - (ii) T_R ist flach (bzw. ${}_R T$ ist projektiv)

Anderson ([1]) zeigt, daß "(ii) $\implies$ (i)" in 2. stets gilt, die Umkehrung ohne die Vor. " M_R ist ein S.G." i.a. falsch ist.

§ 6 Zu den Spuridealen T und Δ gehörige Quotientenkategorien von $\mathcal{M}_R$ und $\mathcal{M}_\Gamma$.

Für Begriffe und Standardaussagen im Zusammenhang mit hereditären Torsionstheorien sei auf [17] verwiesen.

Zu einem zweiseitigen Ideal I von R untersucht B.J. Mueller [12], die hereditäre Torsionstheorie $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, deren Klasse von torsionsfreien Moduln durch

$$\mathcal{F} = \{X_R \in \mathcal{M}_R : \text{Ann}_X I = 0\}$$

gegeben ist. Die zugehörige Quotientenkategorie (d. h. die volle Unterkategorie der bzgl. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ abgeschlossenen Objekte von $\mathcal{M}_R$) werde mit $\mathcal{M}_{R/I}$ bezeichnet.

In diesem Sinne sei $(\mathcal{T}_1, \mathcal{F}_1)$ bzw. $(\mathcal{T}_2, \mathcal{F}_2)$ die von T bzw. Δ bestimmte Torsionstheorie von $\mathcal{M}_R$ bzw. $\mathcal{M}_\Gamma$, $\mathcal{M}_{R/T}$ bzw. $\mathcal{M}_{\Gamma/\Delta}$ und D_1 bzw. D_2 seien entsprechend die zugehörige Quotientenkategorie und der Idealfilter; der lokalisierende Funktor wird in beiden Fällen mit $\wedge$ bezeichnet.

Gemäß [12] sind $\mathcal{M}_{R/T}$ und $\mathcal{M}_{\Gamma/\Delta}$ äquivalent vermöge $\mathcal{M}_{R/T} \ni A \longmapsto [M, A] \in \mathcal{M}_{\Gamma/\Delta}$.

Ferner heißen $A_R \in \mathcal{M}_R$ und $B_\Gamma \in \mathcal{M}_\Gamma$ in [12] korrespondierend ($A_R \sim B_\Gamma$), falls A und B sich unter der genannten Äquivalenz entsprechen, d.h. $[M, \hat{A}]_\Gamma = \hat{B}_\Gamma$. Für diesen Fall ergibt sich ganz kanonisch die Isomorphie gewisser Teilverbände der R -Untermoduln bzw. Γ -Untermoduln von A bzw. B :

SATZ 6.1. [12] : Sei $T^2 = T$, $\Delta^2 = \Delta$. Dann ist für $A_R \sim B_\Gamma$ der Verband der T-accessiblen R-Untermoduln von A isomorph zum Verband der Δ -accessiblen Γ -Untermoduln von B.

Gilt $M = MT$, so sind 2.7. zufolge beide Spurideale idempotent. Das folgende Lemma zeigt, daß A_R und $[M, A]_\Gamma$ in dieser Situation korrespondieren, was über 6.1. auf anderem Wege zum 1. Teil von Satz 4.1. führt. Ferner lassen sich für einen S.G. $M = MT$ die Kategorien $\mathcal{M}_{R/T}$, $\mathcal{M}_{T/\Delta}$ gut beschreiben.

Lemma 6.2.: Es gelte $MT = M$.

1. $[M, \hat{A}]_\Gamma \cong [\widehat{M, A}]_\Gamma$ für $A_R \in \mathcal{M}_R$
2. Ist M_R ein S.G., so folgt weiter:

$$(i) \hat{A}_R \cong [T, A]_R \quad \text{für } A_R \in \mathcal{M}_R$$

$$(ii) [\widehat{M, A}]_\Gamma \cong [M, A]_\Gamma \quad \text{für } A_R \in \mathcal{M}_R$$

$$\text{d.h. } \mathcal{M}_{T/\Delta} = \text{Hom}(\mathcal{M}_R)$$

$$(iii) \mathcal{M}_{R/T} \xrightarrow{\cong} \mathcal{N} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_T / \text{Ker}(- \otimes_T M) = \mathcal{M}_T / \Delta$$

$$A \longmapsto AT \longmapsto [M, A]$$

Beweis:

1. $T^2 = T$ ist nach [12] mit $D_1 = \{I_R \subset R_R : T \subset I\}$ gleichwertig. Man erhält $\hat{A} = \{x \in E(A / \text{Ann}_A T) : xT \subset A / \text{Ann}_A T\}$, wobei $E(-)$ die injektive Hülle in $\mathcal{M}_R$ bezeichnet.

Es folgt $\hat{A}T = A / \text{Ann}_{AT} \cdot T$, d.h. $[M, \hat{A}] = [M, A / \text{Ann}_{AT}]$

Weiter gilt $[M, \hat{A}] \in \mathcal{M}_T / \Delta$, d. h. $[M, \hat{A}] = \widehat{[M, A]}$.

Wegen $[M, \text{Ann}_{AT}] = 0$ ist ferner $[M, A] \subset [M, \hat{A}]$ und es muß nur noch $[M, \hat{A}] / [M, A] \in \mathcal{V}_2$, d.h. $[M, \hat{A}] \Delta \subset [M, A]$, nachgewiesen werden:

Sei $f \in [M, A / \text{Ann}_{AT}]$, $[m, g] \in \Delta$, $\pi: A \xrightarrow{\text{kan}} A / \text{Ann}_{AT}$

und $f(m) = \pi(a)$. Setzt man $f': M \ni x \longmapsto a \cdot g(x) \in$, so erhält man $f[m, g] = \pi f'$.

2. (ii) Aus $A / \text{Ann}_{AT} \cdot T = AT / \text{Ann}_{AT} \cap AT = AT$ (2.9.)

folgt man wie in 1.: $\widehat{[M, A]} = [M, A / \text{Ann}_{AT}] = [M, A]$.

(i) Ganz entsprechend erhält man $[T, \hat{A}] = [T, A]$ und mit [12]: $\hat{A} = [T, \hat{A}] = [T, A]$.

(iii) a) $\mathcal{M}_R / T \ni A \longmapsto AT \in \mathcal{M}$ ist ein Äquivalenz mit Inversum $\mathcal{M} \ni A' \longmapsto [T, A'] \in \mathcal{M}_R / T$:

Für $A \in \mathcal{M}_R / T$ ist $A = [T, A] = [T, AT]$;

für $A' \in \mathcal{M}$ ist $A' = A'T = \hat{A}'T = [T, A']T$

b) Die übrigen Aussagen sind mit 2.11. und den Überlegungen dieses Paragraphen klar.

Folgerungen 6.3.:

M sei ein T-accessibler S.G.

1. Für $A_R \in \mathcal{M}_R$ gilt:

$\text{Ext}_T^1(T/J, [M, A]) = 0$, falls $\Delta_T \subset J_T \subset T$.

Die Testfolgen für Injektivität von $[M, A]_T$ lassen sich also auf Folgen der Form

$$[M, U] \hookrightarrow [M, U] + \Delta, U_R \subset M_R,$$

reduzieren (vgl. 1.6.).

2. Für $B_T \in \mathcal{M}_T$ ist $B_T \otimes M = 0$ mit $BA = 0$ gleichbedeutend.

Ergänzend stellt man fest, daß für einen T-accessiblen S.G. M_R die Klasse $\mathcal{J}_1$ (der torsionsfreien R-Moduln) auch Torsions-klasse einer hereditären Torsionstheorie ist. Dies ist ein weiteres Charakteristikum für Selbstgeneratoren:

Bemerkung 6.4.:

Ist M T-accessibel, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) M_R ist ein S.G.
- (2) Die Klasse $\{A \in \mathcal{M}_R : AT = A\}$ ist die Torsionsklasse einer hereditären Torsionstheorie.
- (3) Aus $[\bar{M}, A] = 0$ folgt $[\bar{M}, E(A)] = 0$ für alle A_R .

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2): Satz 2.9.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): vgl. etwa [17]

Gegebenenfalls hat der korrespondierende Idealfilter die Gestalt $\{I_R \subset R_R : T + I = R\}$, die relativ abgeschlossenen Moduln stimmen mit den torsionsfreien überein; insbesondere hat der lokalisierende Funktor die Gestalt $A \longmapsto A /_{AT}$.

- [20] Willard, E.R.: Properties of projective generators.
Math. Ann. 158, 352 - 364 (1965)
- [21] Würfel, T.: Über absolut reine Ringe. Algebra-
Bericht Nr. 4, Math. Inst. d. Univ.
München (1973)
- [22] Zelmanowitz, J. M.: Regular Modules. Trans. Amer. Math.
Soc, 163, 341 - 355 (1972)
- [23] Fuller, K. R.: Density and Equivalence. J. of
Algebra 29, 528 - 550 (1974)

Lebenslauf

Am 30. Mai 1946 wurde ich als Tochter des Universitätsprofessors Dr. Rolf Huisgen und der Diplom-Chemikerin Dr. Trudl Huisgen, geb. Schneiderhan, in Peißenberg bei Weilheim geboren. Von 1952 - 1956 besuchte ich in München die Volksschule, anschließend neun Jahre lang das städt. St. Anna-Gymnasium, an dem ich 1965 die Reifeprüfung ablegte.

Im selben Jahr schrieb ich mich in Freiburg i. Br. für das Fach Biologie ein, im darauffolgenden Semester begann ich in Freiburg das Studium der Mathematik, welches ich im Winter 1966/67 an der Ludwig-Maximilians-Universität in München fortsetzte und dort im Mai 1972 mit der Diplomprüfung beschloß. Im November desselben Jahres wurde ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Technischen Universität München eingestellt, wo ich derzeit tätig bin.

Seit 1970 bin ich mit dem Diplom-Mathematiker Dr. Wolfgang Zimmermann verheiratet.

München, den 23. Juli 1974

